

読むだけでわかる

数学再入門

線形代数

練習問題・演習問題 編

今井 博 著

Mathematics Re-visted

さらに行列や rank を知っていますか?

本書は、「読むだけでわかる数学再入門 線形代数（本編）」に準拠した、簡易な力試しの練習問題と少々高度な演習問題について、問題と解答をまとめている。本編での問題の答え合わせに、また、解答方法の確認などにご活用され、本編の内容のさらなる理解を深めるようにして頂けたらと存じます。

はじめに

本書は、「読むだけでわかる数学再入門・線形代数編」に記載された練習問題・演習問題を中心に問題と解答を記載した演習書です。

「読むだけでわかる数学再入門 線形代数編」は、線形代数？ それって、なんだっけ、という読者、仕事や研究でベクトルや行列・行列式について必要になったが、どの本で勉強したらよいかかわからない読者をはじめとして、また、数学の授業でどうもよく意味が分からないという理工系の学生のために、懇切丁寧に、手取り足取り説明しています。ただし、宅配の如くお宅まで出張しませんが（笑）、

線形代数学は分かり易く言えば、線状に式が連結された代数学の一部門で、ベクトル空間およびその 1 次変換に関する理論を扱う代数学の一部門、そして、行列や行列式に関する理論を体系化した代数学の一部門、の総称とでも言う学問体系です。要は、高校で習う、ベクトルや行列などを扱う分野のことで、数学の専門用語で線形代数と呼びます、という事です。最近では、ベクトルや行列などを習わない生徒もいるようで、是非、ここで、線形代数の問題と解答を見て体験して下さい。

さて、理学系・工学系の大学や大学院に入って、数学科を卒業した先生の、いかにも「難しいのだ！」という印象を植え付けるような講義で、うんざりですよ。分かります。というか、実は、これが私の実体験です（T_T）。色々苦労したからこそ私は書きました。数学科を出た先生の書いた教科書は、プライドからか、いかにも難しそうに、しかも途中の式変形を省略し、「どうだ、すごいだろう。おまえらにはできないだろう」という書き方をしているようにしか私には思えません。しかし、実は、その講義内容は、そのほとんどが数学の先生がご自身で構築した数学体系ではなく、数 100 年前に確立した数学体系のコピーであり、それを恰も自分が組み上げたかのように、偉そうに講義しているのです。ちょっと言い過ぎかな？ そんなステレオタイプの分かりにくい授業を受けて苦労している、高校生や大学生や、社会人に読んでもらいたいのです。どうせ書くなら、もっと、分かりやすく書けばいいのにとします。

「読むだけでわかる数学再入門 線形代数編」のコンセプトは「読むだけでわかる」ように書くことです。かと言って、漫画本のようにすらすらドラマを見るように読めるわけではありません。ある程度の高校生の数学知識レベルが必要になります。本書では、基礎的なあるいは実用的と考えられる問題を扱います。とにかく、難しくないじゃん！、とってください。私が書いているくらいですから（^_^）。簡単すぎる問題の解答は「略」としています。ご容赦ください。本書を読み、皆さんがさらに高度なレベルへとステップアップして頂けたら幸甚に思います。

さて、一番大事なのは、定義と定理をよく理解した上で、問題と解答を最後まで読むことです。ここで「読む」とは、数式の流れを目で見て、なるほど、と納得することです。解答は読むだけで理解できるはずで、と思います。本書でも、式の変形は、目で追えるように、できる限り省略しないようにしています。ふむふむと流れを追ってください。

Let's get started !

2019 年 10 月
著者



目 次

基 礎 編	1
1. 線形代数 I	2
1.1. 線形代数とは	3
1.2. ベクトル I	7
1.3. 行列 I	12
1.4. 行列式 I	15
1.5. ベクトル II	18
1.6. 連立 1 次方程式	19
演習問題 第 1 章	21
応 用 編	23
2. 群・環・整域・体	24
2.1. 群	25
2.2. 環・整域・体	28
演習問題 第 2 章	31
3. 線形代数 II	32
3.1. 行列 II	33
3.2. 固有値 I	34
3.3. ケーリー・ハミルトンの定理	36
3.4. 複素行列	36
3.5. 2 次形式	39
演習問題 第 3 章	41
4. 線形代数 III	42
4.1. ベクトル空間の基礎	43
4.2. ベクトル III	45
4.3. テンソル	47
4.4. 行列空間	48
4.5. 写像	48
4.6. ベクトル IV	50
演習問題 第 4 章	52
5. 線形代数 IV	53
5.1. 行列 III	54
5.2. 階数	56
5.3. 逆行列とクラメルの式	57
演習問題 第 5 章	58
6. 線形代数 V	59
6.1. 行列式 II	60
演習問題 第 6 章	62
7. 線形代数 VI 補足	63
7.1. ベクトル IV 微分	64
7.2. 直線内挿	65
7.3. 平面内挿	66
7.4. 曲線内挿	66
7.5. ベクトル V 幾何問題	67
7.6. 固有値 II	67
7.7. 内積空間 II	67
演習問題 第 7 章	68
練習問題 解答	69
第 1 章	70
第 2 章	75

第 3 章	76
第 4 章	80
第 5 章	83
第 6 章	84
第 7 章	85
演習問題 解答	87
第 1 章	88
第 2 章	90
第 3 章	91
第 4 章	93
第 5 章	95
第 6 章	97
第 7 章	98
付録 公式集	101

基礎編

1. 線形代数 I

線形代数 I

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

ここでは、まず、線形代数とは、一体、どのような数学形態なのか、概略を示して簡単に説明したいと思います。演算は、単なる数字の加減乗除ではありません。要は、高校時代に習ったベクトルや行列などに関する表式の復習と計算方法の拡張とえば分かるでしょうか？ 内容的には、なんら変わりませんし、前に習ったことがある読者は、最初の部分は飛ばしても結構かと思います。最近、線形代数を高校で習わない読者もいるそうで、そんな読者にも入門書として読んで頂けたらと思います。

ここで、申し上げますが、ベクトルの添え字で、 x, y, z は 3 次元で、 xyz 軸への対応で、 $1, 2, \dots, n$ は n 次元で、一般的な説明で使用します。後者は、 Σ 記号を使う場合に便利な場合にも使います。すなわち、 $x \leftrightarrow 1, y \leftrightarrow 2, z \leftrightarrow 3$ のように対応するということです。また、証明で数学的帰納法については、十分承知されているということが前提で、説明なしに用います。数学的帰納法とは、整数 n が用いられている式、例えば、数列の n 項までの和を求める式を証明するとき、まず、 $n=1$ 、または、 $n=1$ および $n=2$ で与式が成立することを確かめたのちに、 $n=k$ のときに与式が成立すると仮定し、 $n=k+1$ の場合も成立するならば、与式が証明できた、とする例の定番の方法です。もう一つ、複素数の複素共役をご存知でしょうか？ 敢えて書くと、 $z = a + ib$ ($i = \sqrt{-1}$) と書く複素数の複素共役は $\bar{z} = a - ib$ ($i = \sqrt{-1}$) と書きます。ここで、高校レベルの言葉の準備ができました。その他の定義などは本文で紹介します。お楽しみに！

さあ、have a nice trip.



1.1.線形代数とは

まずは、本書で用いる数学記号を紹介します。特に断らないで使います。ただし、詳細の説明が必要な場合はそこで説明します。他の教科書とは統一性がないのでご注意を！

1) 「数」関連記号

K : 代数的数全体の有限的な部分集合

P : 素数(prime number)の全体, 空間など

N : 自然数(natural number)の全体 ; **N** : 正の整数

Z : 整数(独: Zahlen)の全体 ; **Q** : 有理数(Quotient)の全体

A : 代数的数(algebraic number)の全体, アフィン空間 (affine space)

C : 複素数(complex number)の全体 ; **R** : 実数部(real) ; **I** : 純虚数(imaginary)

Re : 実数部(real part) ; **Im** : 虚数部(imaginary part)

C^n : 複素数 n 次元ベクトル空間(総称) ; V^n : n 次元ベクトル空間(総称)

G : 群(group) ; G_C : 巡回群 ; G_H : 半群(semigroup) ; G_S : 部分群 ; G_U : 単位群,

R : 環(ring) ; R_0 : 零環 ; R_i : 整域 ; **F** : 体(field) ; Λ : 単位的環 ; F_S : 部分体

2) 「集合(set)」関連記号 (流儀で異なる)

$=$: 集合の一致(equal all elements)

$\subseteq$: 部分集合(subset) ; $\not\subseteq$: 部分集合の否定(not subset)

$\subsetneq$: 真部分集合(proper subset) ; $\subset$: 真部分集合(proper subset)

$\in$: 元(element) ; $\notin$: 非元(not element) ; $\emptyset$: 空集合(要素がない) (empty set)

$\forall$: 全称記号「全ての」(for all, for any) ; $\exists$: 存在記号(for some, exsiting)

$\bigcap_i A_i$: 共通集合(intersection) ; $\bigcup_i A_i$: 和集合(union)

$\vee$: 結び(join) ; $\wedge$: 交わり(meet)

3) 「演算」関連記号

$\approx$, $\cong$, $\doteq$: 約, ほぼ(nearly equal to) ; $\sqrt{\quad}$: 根号 ; $\sqrt[k]{\quad}$: k 乗根

$\leq$ または $\leq$: 以下(not greater than) ; $\geq$ または $\geq$: 以上(not smaller than)

$\ll$: よりかなり小さい(fairly small) ; $\gg$: よりかなり大きい(fairly large)

$\neq$: 等しくない(not equal) ; $\equiv$: 合同(congruence) ; $\angle$: 角 ($\angle R$: 直角)

∞ : 無限大(infinity) ; $\sim$: 相似(similarity) ; $\propto$: 比例(proportion)

$\parallel$, $\parallel$: 平行(parallel) ; $\nparallel$: 非平行(non-parallel) ; $\perp$: 直角(right angle)

$\therefore$: 故に, したがって(therefore) ; $\because$: 何故なら(because)

$\vee$: 論理和(logical sum) ; $\wedge$: 論理積(logical product) ; $\wedge$: ウェッジ積(wedge)

$\oplus$: 直和(direct sum) ; $\otimes$: 直積(direct product) ; $\|\mathbf{x}\|$: ベクトルのノルム(norm)

$*$: コンボリューション(convolution) ; $\cdot$: 内積 ; $\times$: ベクトル積(外積)

∇ : ナブラ(nabla) ; Δ : ラプラシアン(Laplacian) ; $\square$: ダランベリアン(d'Alembertian)

$\sum$: 総和記号, シグマ記号(summation) ; $\prod$: 総乗記号, パイ記号(power)

$\dim$: 次元 ; rank : 階数 ; ord : 位数 ; $\sup$: 上限(supremum) ; $\inf$: 下限(infimum)

$\text{mod}(n \equiv m \pmod{d})$ は n と m が d を法として合同であることを示す

定義1 スカラー (scalar) $a, e, \phi, \delta, \dots$

単なる数や関数の代表である文字を用いた表式 $a, f(x), |\mathbf{A}|$ 等をスカラーと呼ぶ。

定義2 ベクトル (vector) $\mathbf{a}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}, \dots$

いくつかのスカラーや関数を括弧で括った形式をベクトルあるいは有向線分と呼ぶ。

$$\mathbf{a}, \bar{\mathbf{b}}, \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \boldsymbol{\alpha} = (\alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_n))$$

形式は複数あり、大きさ(長さ)と向きを持ち、括弧で括られた表式を要素と呼ぶ。

定義3 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Delta}, \dots$

いくつかの数や文字や関数やベクトルを括弧で括った形式を行列 (matrix) と呼ぶ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{あるいは}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(x) & \cdots & f_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

定義4 行列式 $|\mathbf{A}|, |\mathbf{E}|, |\boldsymbol{\Phi}|, |\boldsymbol{\Delta}|, \dots$

絶対値を表す縦棒 2 本の中に要素を縦横同数並べた形式を行列式 (determinant) と呼ぶ。

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \text{あるいは}, |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \phi_{11}(x) & \cdots & \phi_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(x) & \cdots & \phi_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

練習問題 1.1.1-1 次の表式は、スカラーか、ベクトルか、行列かを答えよ。

- (1) $\mathbf{a} = \{0\}$, (2) 1, (3) $\mathbf{A} = \{0\}$, (4) $|3|$, (5) $\|0\|$

定義5 1次結合あるいは線形結合

変数 $x_i (i=1 \sim n)$ あるいは複数の関数 $f_i(x) (i=1 \sim n)$ があり、その係数 $a_i (i=1 \sim n)$ がスカラーであるとき、

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0$$

のように、あるいはまた、ベクトル $\mathbf{a}_i$ や行列 $\mathbf{A}_i$ が

$$a_1 \mathbf{a}_1 + a_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + a_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

$$a_1 \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{A}_2 + \cdots + a_n \mathbf{A}_n = \mathbf{O}$$

のような、直線的な連結を、1次結合あるいは線形結合 (linear combination) と言う。

定義6 1次独立あるいは線形独立

定義5で、スカラーの係数が $a_i (i=1 \sim n) = 0$ のときのみ成り立つ場合、

変数 x_i 、関数 $f_i(x)$ 、ベクトル $\mathbf{a}_i (i=1 \sim n)$ 、あるいは、行列 $\mathbf{A}_i (i=1 \sim n)$ は、1次独立である、あるいは、線形独立である、と言う。

練習問題 1.1.2-1 3個の要素を持つベクトル $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ が1次独立であることを示せ.

練習問題 1.1.2-2 3個の要素を持つベクトル $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ が1次独立であるための a の条件は何か?

練習問題 1.1.2-3 1つのベクトル $\mathbf{a}$ がスカラー係数 $\lambda (\in \mathbb{R})$ によって $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ と書く場合, ベクトル $\mathbf{a}$ が1次独立であるか, 1次従属であるか, について論じよ.

定義 7 1次従属

次の1次結合

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0$$

で, スカラーの係数 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 中の少なくとも1つ, 0でない係数がある場合, その係数を $a_k (\neq 0, 1 \leq k \leq n)$ (「 $\neq$ 」は, この右辺と左辺は等しくない, という記号) とすれば, 式 1.1.3-1 は次式のように表すことができる.

$$f_k(x) = -\frac{a_1}{a_k} f_1(x) - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} f_{k-1}(x) - \frac{a_{k+1}}{a_k} f_{k+1}(x) - \cdots - \frac{a_n}{a_k} f_n(x)$$

ここで,

$$b_j = -a_j / a_k \quad (j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

とするならば, 式 1.1.3-2 は,

$$f_k(x) = b_1 f_1(x) + \cdots + b_{k-1} f_{k-1}(x) + b_{k+1} f_{k+1}(x) + \cdots + b_n f_n(x)$$

と表せる. このとき,

$$f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_n(x)$$

は1次従属であるという.

練習問題 1.1.3-1 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について, $\mathbf{a} = (2 \ -1 \ 3)^T$, $\mathbf{b} = (1 \ 3 \ 2)^T$ のとき, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{c}$ の要素を求めよ.

練習問題 1.1.3-2 ベクトル $\mathbf{a} = (1 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{b} = (1 \ 0 \ 1)^T$, $\mathbf{c} = (0 \ 1 \ 1)^T$ が1次独立であることを示せ.

練習問題 1.1.3-3 次のことを証明せよ

- (1) 1次独立なベクトルから幾つかのベクトルを取っても1次独立であること.
- (2) 1次従属なベクトルに幾つかのベクトルを加えても1次従属であること.

練習問題 1.1.4-1 $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ と書くとき, その意味を記せ.

練習問題 1.1.4-2 2次元ベクトル $\mathbf{x}$ について, $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ と書くとき, その幾何的意味を記せ.

練習問題 1.1.4-3 $\forall a \in \mathbf{P}$ と書くとき, その意味を記せ. ただし, $\mathbf{P}$ は素数全体である.

練習問題 1.1.4-4 $\sqrt[3]{27}$ を簡単にせよ.

練習問題 1.1.4-5 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ と書くとき, その意味を記せ.

練習問題 1.1.4-6 集合 Φ および集合 Θ があって, $\Phi \subseteq \Theta$ と書くとき, その意味を記せ.

練習問題 1.1.4-7 集合 Φ および集合 Θ があって, $\Phi \not\subseteq \Theta$ と書くとき, その意味を記せ.

練習問題 1.1.5-1 奇数は自然数 n ($n \in \mathbf{N}$) を用いて, $2n-1$ と表せる. 実際, $2n-1$ に 1, 2, 3, $\dots$, のように代入すると, 1, 3, 5, $\dots$, が得られる. そこで, 奇数の n 項までの和を求めよ. また, 偶数 $2n$ ($n \in \mathbf{N}$) の n 項までの和を求めよ.

練習問題 1.1.5-2 次式を計算せよ.

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i \right)$$

練習問題 1.1.5-3 次式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$$

練習問題 1.1.5-4 次式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \right) = \frac{1}{4} n(n+3)$$

練習問題 1.1.5-5 次式が成り立つことを示せ.

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2 = \prod_{i=1}^n a_i^2 \quad (a_i \neq 0: i=1, 2, \dots, n)$$

練習問題 1.1.5-6 5 個の $\boxed{1} \sim \boxed{5}$ にあてはまる数学記号を書け.

- 1) 直線 ℓ と直線 m が平行であることを $\ell \boxed{1} m$ と書き, 直交する場合は $\ell \boxed{2} m$ と書く.
- 2) $m, n \in \mathbf{Z}$ である m, n について, 大きさが $m \boxed{3} n$ である場合 $m/n \boxed{4} 0$ であり, 大きさが $m \boxed{5} n$ である場合は, $n/m \boxed{4} 0$ である.

定義 8 ブール代数の演算の公理

以下の公理を有する演算形式が成り立つ代数形式をブール代数と呼ぶ。

- (1) $a + b = b + a$ (交換律) (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
 (3) $a + 0 = a$ (同一律) (4) $a + a = a$ (5) $a \cdot b = b \cdot a$ (交換律)
 (6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (7) $a \cdot 1 = a$ (同一律) (8) $a \cdot a = a$
 (9) $a \cdot a' = 0$ (補元律) (10) $a + a' = 1$ (補元律) (11)

1.2. ベクトル I

定義 9 ベクトルとスカラー

- 1) ベクトルとは、位置、速度、加速度の時間変化や力の変化のように、大きさと向きを持っている量を表す表式で、有向線分 (*directed segment*) とも言う。本書での表式は $\mathbf{a}$ のように小文字で太文字を使う。因みに、加速度の時間変化を躍度または加加速度という。
 2) スカラーとは、大きさのみを持つ量で、長さや質量、温度や湿度、時間などを示す「数値」や数字を表す「関数」のことである。表式は a や f のように細文字を使う。

定義 10 位置ベクトルの表式 $n \in \mathbf{N}$ である n を用いて、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)^T \quad \text{あるいは、} \quad \mathbf{a} = \{a_i\} (1, 2, \dots, n)$$

練習問題 1.2.1-1 4点 $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$, $B = (0, y)$, $C = (x, 0)$ ($0 < x, y$) について、ベクトル OA と BC が直交する条件を x, y で示せ。

練習問題 1.2.1-2 任意の n 角形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ があって、ベクトル $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) を頂点 A_i から頂点 A_{i+1} に向かうベクトル、また、ベクトル $\mathbf{a}_n$ を頂点 A_n から頂点 A_1 に向かうベクトル、と定義するとき、 $\sum_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ であることを証明せよ。(例題 1.2.2-1 参照)

定義 11 ベクトルの長さ (ノルム *norm* という)

n 次元実ベクトル $\mathbf{a} = \{a_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\in \mathfrak{R}$ の数学的な「長さ」は、2本の二重線 $\|\cdot\|$ を用いて、以下のように、

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

と書いて L^2 (えるつつ) ノルムと呼ぶ。

定義 12 関数のノルム

定義域 $a \leq x \leq b$ で定義された関数 $f_p(x)$ があって、その積分が存在すると仮定する。このとき、負でない $f_p(x) \cdot f_p(x)$ の平方根を関数 $f_p(x)$ のノルムと言う場合がある。

$$\|f_p(x)\| = \sqrt{f_p(x) \cdot f_p(x)} = \sqrt{\int_a^b f_p^2(x)}$$

練習問題 1.2.3-1 ベクトル $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -1)$ について、以下に示すベクトル $\mathbf{c}$ を要素表示せよ。

$$(1) \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, (2) \mathbf{c} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}, (3) \mathbf{c} = 0.5\mathbf{a} - \mathbf{b}, (4) \mathbf{c} = 0.3\mathbf{a} + 2.4\mathbf{b}$$

練習問題 1.2.3-2 ベクトル $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -1)$ について、以下に示すベクトル $\mathbf{p}$ の L^2 ノルム, $\|\mathbf{p}\|$ を、小数点 3 位以下を四捨五入し小数点 2 位まで計算せよ。

$$(1) \mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, (2) \mathbf{p} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}, (3) \mathbf{p} = 0.5\mathbf{a} - \mathbf{b}, (4) \mathbf{p} = 0.3\mathbf{a} + 2.4\mathbf{b}$$

練習問題 1.2.3-3 ベクトル $\mathbf{a} = (0, 5, 3, 0, 6)^T$ について、 L^0 ノルムを記せ。

練習問題 1.2.3-4 ベクトル $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ について、 L^1, L^2, L^∞ について

$$(1) L^1 = 1, (2) L^2 = 1, (3) L^\infty = 1$$

をそれぞれ、直交する p_1 軸および p_2 軸の図を用いて説明せよ。

練習問題 1.2.4-1 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ であるときの演算方法を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum a_i b_i$ とします。ここで、3次元単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ について、

$$(1) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \text{ を示せ。} \quad (2) \|\mathbf{e}_x\| = \|\mathbf{e}_y\| = \|\mathbf{e}_z\| = 1 \text{ を示せ}$$

練習問題 1.2.4-2 3次元ベクトルを単位ベクトルの1次結合で表わせ。また、

$$\mathbf{b} = 2a\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 4b\mathbf{e}_z \text{ である場合、ベクトル } \mathbf{b} \text{ を要素表示せよ。}$$

練習問題 1.2.4-3 ベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ a_3)^T$ および 3次元単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ およびクロネッカーのデルタ $\delta \mathbf{a} = (2, 6, 1)^T$ により、

$$\mathbf{a} = \sum_{\textcircled{1}=1}^3 \sum_{\textcircled{2}=1}^3 \delta_{\textcircled{1}\textcircled{2}} a_{\textcircled{2}} \mathbf{e}_{\textcircled{1}}$$

と書けるとすると、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ に入るのは i, j のうちどれか。

また、ベクトル $\mathbf{a}$ が n 次元ベクトルの場合、上式はどのように書けるか答えよ。

練習問題 1.2.5-1 $\triangle ABC$ の頂点で作るベクトル $\vec{AB}$ および $\vec{AC}$ とするとき、 $\vec{CB}$ をベクトル $\vec{AB}$ および $\vec{AC}$ で表せ。

練習問題 1.2.5-2 三角形 ABC の頂点 A を起点とするベクトル $\vec{AB}$ および $\vec{AC}$ を用いて辺 BC の中点を表せ。

定義 13 ベクトルの和差

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは,} \quad \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_i \pm b_i\}, (i=1, 2, \dots, n)$$

定義 14 内積

ベクトル $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ の内積とは、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と書き、その定義は、3次元ベクトルが、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ の場合

1) 要素による定義：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

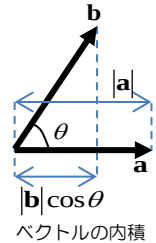
2) 幾何的な定義：

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

です。 $\|\mathbf{a}\|$ および $\|\mathbf{b}\|$ はそれぞれ、ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ の長さ L^2 ノルムであり、

$$L^2 : \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

であり、また、 θ はベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ とがなす角である (図 1.2.6-2 参照)。



定義 15 ベクトル積

ベクトル $\mathbf{a}$ および $\mathbf{b}$ のベクトル積とは、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と書き、その定義は、3次元ベクトルを $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ とすれば、

1) 要素による定義：

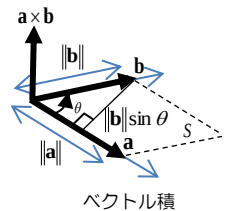
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{e}_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \mathbf{e}_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \mathbf{e}_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ここで、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は単位ベクトルである (項 1.2.4 参照)。

2) 幾何的な定義： (図 1.2.6-3 参照)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta) \mathbf{e}_{\perp \mathbf{a}, \mathbf{b}}$$

ここで、 $\mathbf{e}_{\perp \mathbf{a}, \mathbf{b}}$ は単位ベクトルで、ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ で構成する平面に垂直であり、その方向はベクトル $\mathbf{a}$ からベクトル $\mathbf{b}$ へと回転させた右ねじが進む方向とする。



練習問題 1.2.6-1 互いに同じ平面に無い 3 つのベクトルで構成する平行六面体の体積がスカラー三重積で表せることを幾何的に証明せよ。

練習問題 1.2.6-2 $\mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 2, 0), \mathbf{c} = (3, 2, 1)$ で構成する平行六面体の表面積および体積を計算せよ。

練習問題 1.2.6-3 ベクトル $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$ について、次の計算をせよ。

- (1) $\mathbf{a}$ の大きさ $\|\mathbf{a}\|$ (2) $\mathbf{b}$ の大きさ $\|\mathbf{b}\|$ (3) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (4) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

練習問題 1.2.6-4 ベクトル $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$ について、定義 13 にしたがって内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を計算せよ。また、その結果がスカラーかベクトルかを記せ

練習問題 1.2.6-5 ベクトル $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$ について、定義 14 にしたがって、ベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を計算せよ。また、その結果がスカラーかベクトルかを記せ。ただし、3次元単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ とする。

練習問題 1.2.7-1 ベクトル $\mathbf{a} = (1, -2, 4)$, $\mathbf{b} = (4, 4, 1)$ の内積を計算せよ。

練習問題 1.2.7-2 ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について、 $\|\mathbf{a}\| = 3$, $\|\mathbf{b}\| = 2$ で、始点が同じで、間の角 60° である場合、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を計算せよ。

練習問題 1.2.7-3 直線 $2x + y = 4$ に垂直なベクトル $\mathbf{p}$ を求めよ

練習問題 1.2.7-4 直線 $ax + by + c = 0$ に垂直なベクトル $\mathbf{p}$ を求めよ。

練習問題 1.2.8-1 位置ベクトル $\mathbf{a} = (1, 1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (0, 1, 3)^T$ について、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 、およびベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ をそれぞれ求めよ。

練習問題 1.2.8-2 空間にすべて異なる4点

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3), \mathbf{D} = (d_1, d_2, d_3)$$

が作る平行六面体の体積 V は、次式で表されることを示せ。

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

練習問題 1.2.9-1 3次元ベクトルを $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ として、以下を証明せよ

(1) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$

(2) ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が直交する場合、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$

練習問題 1.2.9-2 3次元ベクトルを $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ として、以下を証明せよ

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$

練習問題 1.2.9-3 ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ を示せ.

練習問題 1.2.9-4 ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を示せ.

練習問題 1.2.9-5 ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ について, 次式が成り立つことを示せ.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

練習問題 1.2.10-1 ベクトル $\mathbf{a} = (3, 0, 4)$ の方向余弦 ℓ , m , n を求めよ. また, 方向余弦の2乗和が $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ であることを示せ.

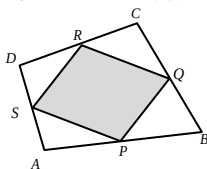
練習問題 1.2.10-2 $\|\mathbf{a}\| = 6$ であるベクトル $\mathbf{a}$ が, x 軸と $\cos\theta_x = 2/3$, y 軸と $\cos\theta_y = 1/3$, z 軸と $\cos\theta_z = 2/3$ という方向余弦関係にあるとき, ベクトル $\mathbf{a}$ の座標 (a_x, a_y, a_z) を求めよ.

練習問題 1.2.12-1 位置ベクトル $\mathbf{a} = (1, 1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (0, 1, 3)^T$ について, ベクトル $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ を 3:2 に内分する点, および, ベクトル $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ を 3:2 に外分する点への位置ベクトル $\mathbf{c}$ をそれぞれ求めよ.

練習問題 1.2.12-2 三角形 ABC があって, その重心 G の位置ベクトル $\mathbf{g}$ を, 三角形の各頂点 A, B, C に対する位置ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で表せ.

練習問題 1.2.12-3 点 $P(\mathbf{r}_p)$ を通り, ベクトル $\mathbf{a}$ により定義する直線のベクトル方程式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p + t\mathbf{a}$ を, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_p = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ の各座標で, t を消去して表せ. ただし, $a_x, b_y, c_z \neq 0$ とし, ここで, t は媒介変数で $t \neq 0$ とする.

練習問題 1.2.12-4 外に凸の四角形 $ABCD$ があって辺 AB の中点を P , 辺 BC の中点を Q , 辺 CD の中点を R , 辺 DA の中点を S とする. このとき四角形 $PQRS$ (右図) は平行四辺形となることをベクトルで示せ.



練習問題 1.2.12-5 原点を起点とする2つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ であるとき, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ となるベクトル $\mathbf{c}$ は, ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ のなす角を2等分することを示せ.

1.3.行列 I

定義 16 行列

$m \times n$ 型の行列とは, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$, または, 次式,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

のように書く.

練習問題 1.3.2-1 以下の行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{B}$ について, 和と差をそれぞれ計算せよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.2-2 以下の行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{B}$ について, 可換 ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$) であることを示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.2-3 以下の行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{B}$ について, 積 $\mathbf{AB}$ は, $\mathbf{AB} = -\mathbf{A}$ であることを示せ. ただし, ω は $x^3 - 1 = 0$ の虚数解の1つである.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.2-4 以下の行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{E}$ について, $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ となる 2×2 の行列 $\mathbf{X}$ を求めよ. また, $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ であることを確かめよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.2-5 計算可能な行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ について $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ であることを示せ.

練習問題 1.3.3-1 以下の行列 $\mathbf{R}$ が直交行列であることを示せ

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.3-2 練習問題 1.3.3-1 の行列 $\mathbf{R}$ の n 乗が次式になることを証明せよ。

$$\mathbf{R}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.3-3 任意の正方行列 $\mathbf{A}$ による以下の行列 $\mathbf{S}$ は対称行列であることを示せ。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$$

練習問題 1.3.3-4 任意の正方行列 $\mathbf{A}$ による以下の行列 $\mathbf{T}$ は交代行列であることを示せ。

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

練習問題 1.3.3-5 次の行列 $\mathbf{A}$ に対し, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}$ となる行列 $\mathbf{B}$ を求めよ。また, 求めた行列 $\mathbf{B}$ を用いて, $|\mathbf{B} + \mathbf{A}^T|$ および $|\mathbf{B} - \mathbf{A}^T|/6$ を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 3i-1 \\ -3i+1 & 0 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.4-1 2 次の正方行列 $\mathbf{A}$ および行列 $\mathbf{E}_{12}(k)$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, $\mathbf{A}\mathbf{E}_{12}(k)$ および $\mathbf{E}_{12}(k)\mathbf{A}$ を計算し, 比較せよ。

練習問題 1.3.4-2 行列 $\mathbf{A}$ および行列 $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき, アダマール積 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ および $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ を計算し, 可換であることを示せ。

練習問題 1.3.4-3 行列 $\mathbf{A}$ および行列 $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とするとき, クロネッカー積 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ および $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ を計算し, 可換ではないことを示せ。

定義 17 行列のトレース

n 次の正方行列 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $|\mathbf{A}| \neq 0$ について, 主対角線上の成分の和をトレースと呼び, $\text{tr}(\mathbf{A})$, あるいは, $\text{trace } \mathbf{A}$ と書いて, その計算は次式で行う:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{(i,j)=1}^n a_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

また, $\text{diag } \mathbf{A}$ と書く場合がある. (行列の対角線 *diagonal* に由来)

練習問題 1.3.5-1 次の行列 $\mathbf{A}$ について, $\text{tr } \mathbf{A}^T = \text{tr } \mathbf{A}$ を示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.5-2 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について, $\text{tr } \mathbf{AB} = \text{tr } \mathbf{BA}$ であることを示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.3.5-3 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ について, $\text{tr } \mathbf{ABC} = \text{tr } \mathbf{CAB} = \text{tr } \mathbf{BCA}$ であることを示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

定義 18 行列ノルム

行列ノルム (*matrix norm*) は誘導ノルム (*induced norm*) あるいは作用素ノルム (*operator norm*) と呼ばれ, n 次の正方行列の場合, 誘導ノルム, 作用素ノルムあるいはスペクトルノルムはベクトルの p ノルムに対応して,

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

と書かれる. ここで, 特に, $p=1, p=\infty$ の場合,

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) \quad \text{および} \quad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

と書く, という文献があるが, この表式が正しいのかは著者は分からない. また,

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \{\|\mathbf{Ax}\|\}$$

と書く定義もある.

さらに, 正方行列かつ $p=2$ に対してユークリッドノルム (長さ) を考えた場合には誘導された行列ノルムはスペクトルノルム (*spectral norm*) と呼ばれ, 行列 $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ の最大固有値 (後述) $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})$ の平方根を用いた「 L^2 ノルム」は, $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})}$ と書く.

行列の成分ごとのノルムは, m 行 n 列の行列を $m \times n$ 成分のベクトルと見なして、ベクトルの通常のノルムを考えたもので,

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

において、特に、 $p=2$ の場合はフロベニウスノルム (Frobenius norm) または、ヒルベルト＝シュミットノルム (Hilbert-Schmidt norm) と呼ばれ、次のように書く。

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k=\text{Min}(m,n)} \sigma_i^2}$$

練習問題 1.3.6-1 行列 $\mathbf{A}$ のノルムに関して、 $\|\mathbf{A}\|_1, \|\mathbf{A}\|_2, \|\mathbf{A}\|_p, \|\mathbf{A}\|_\infty$ の意味を説明せよ。

練習問題 1.3.6-1 行列の $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ のノルムに関して、 $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ であることを示せ。

1.4. 行列式 I

定義 19 行列式

n 次の正方行列 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ について、 $|\mathbf{A}|$ と書いて、行列式と呼び、具体的な表式は、

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

である。行と列の要素数が n 個のとき、 n 次の行列式と呼ぶ。特に、 $|\mathbf{A}| \neq 0$ である行列を正則行列 (regular matrix) と呼ぶ。

練習問題 1.4.1-1 以下の行列式をサラスの方法で計算せよ。

$$(1) |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

練習問題 1.4.1-2 以下の行列式をサラスの方法で計算し、整数で答えよ。ただし、 ω は $x^3 = 1$ の 3 つある解のうち $x = 1$ 以外の解の 1 つとする。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \omega^2 & -1 \\ \omega & 1 \end{vmatrix} \quad (2) \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$$

練習問題 1.4.1-3 以下の問いに答えよ。

- (1) 1, 2, 3 で作る順列で、偶順列および奇順列を全て答えよ。
- (2) (4, 2, 3, 1) なる順列を基準順列にするための転倒数を答えよ。

練習問題 1.4.2-1 次の行列 $\mathbf{A}$ について、余因子 $\tilde{a}_{31}$ を計算せよ。ただし、(2) に用いられている ω とは $x^3 = 1$ の 3 つある解のうち $x = 1$ 以外の解の 1 つとする。

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & -1 \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ -1 & \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.4.2-2 行列式 $|\mathbf{A}| = -1$ のとき、 a を計算せよ。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

練習問題 1.4.2-3 式 1.4.1-3 で扱った行列式 $|\mathbf{A}|$ について、

- (1) $a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13}$ を計算せよ。
- (2) $a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31}$ を計算せよ。
- (3) 式 1.4.1-3 と本問 (1) および (2) の結果とを比較せよ

練習問題 1.4.3-1 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$$

である 3 次元ベクトルとすると、

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

が成立すること確かめよ。

また、行ベクトルを 1 回、2 回、3 回と入れ替えた場合、および、列ベクトルを 1 回、2 回、3 回と入れ替えた場合、行列式の符号がどのように変わるか答えよ。

練習問題 1.4.3-2 次の行列式 $|\mathbf{A}|$,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を a_{ij} で偏微分すると、 a_{ij} の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ となることを証明せよ。すなわち、

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = \tilde{a}_{ij}$$

練習問題 1.4.3-3 1 次の行列式は展開すると 1 項である。2 次の行列式は展開すると 2 項の 1 次結合となる。しかし、3 次の行列式を展開すると 6 項の 1 次結合になる。では、4 次の行列式は展開すると、何項の 1 次結合になるか答えよ。さらに、 n 次の行列式を展開

すると、何項の 1 次結合になるか答えよ。ただし、いずれの場合も、各項は相殺などせず、計算後の項数は減らないものとする。

例 3 次の行列式を展開すると 6 項の 1 次結合になる

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32}$$

練習問題 1.4.4-1 以下の行列 $\mathbf{A}$ について、 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$ を示せ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

練習問題 1.4.4-2 適当な 3 次の正方行列を用いて以下の式を示せ。

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}| = |\mathbf{a} \pm k\mathbf{b} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}|$$

練習問題 1.4.5-1 次の行列式を和形式の分離の方法で解け。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

練習問題 1.4.5-1 次の行列式を和形式の分離の方法で解け。

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 9 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

(補足)

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{(i,j,\dots,k)}^n \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix} a_{1i}a_{2j} \dots (k_1a_m + k_2a_m) \dots a_{nk} \quad (1 \leq m \leq n) \\ &= \sum_{(i,j,\dots,k)}^n \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix} a_{1i}a_{2j} \dots (k_1a_m) \dots a_{nk} + \sum_{(i,j,\dots,k)}^n \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix} a_{1i}a_{2j} \dots (k_2a_m) \dots a_{nk} \\ &= k_1 \sum_{(i,j,\dots,k)}^n \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix} a_{1i}a_{2j} \dots (a_m) \dots a_{nk} + k_2 \sum_{(i,j,\dots,k)}^n \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix} a_{1i}a_{2j} \dots (a_m) \dots a_{nk} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 k_\ell \left(\sum_{(i,j,\dots,k)}^n \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & j & \dots & k \end{pmatrix} a_{1i}a_{2j} \dots a_m \dots a_{nk} \right) \end{aligned}$$

練習問題 1.4.6-1 行列式の性質 (3_D) について、 n 次の行列式 $|\mathbf{A}|$ で、2 つの行または列が等しいと $|\mathbf{A}| = 0$ であることを証明せよ。

練習問題 1.4.6-2 行列式の性質 (4_D) について、 n 次の $|\mathbf{A}'|$ は、行列式 $|\mathbf{A}|$ で、1 つの行 (または、列) の要素すべてを k 倍した行列式は、 $k|\mathbf{A}|$ であることを証明せよ。

練習問題 1.4.6-3 行列式の性質 (5_D) について, 行列式 $A = \begin{vmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} \mathbf{q} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}$ の和 $A \pm B$ が, 行列式 $\begin{vmatrix} \mathbf{p} \pm \mathbf{q} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{vmatrix}$ であることを証明せよ.

練習問題 1.4.6-4 行列式の性質 (6_D) について, ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 作る次の行列式の式: $\begin{vmatrix} \mathbf{a} + k\mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix}$ を証明せよ.

練習問題 1.4.6-5 ヴァンデルモンドの行列式 ${}^4\Theta$ について, 例題 1.4.6-2 の方式による方法と式 1.4.6-36 による方法で答えが同じであることを確かめよ.

$${}^4\Theta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

1.5. ベクトル II

練習問題 1.5.1-1 図 1.5.1-2 で示す, 3 つのベクトルで構成する平行六面体の体積がスカラー三重積で表せることを幾何的に証明せよ.

練習問題 1.5.1-2 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$ で構成する平行六面体の体積を計算せよ.

練習問題 1.5.1-3 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を 3 次元ベクトルとして $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ と $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$ を, 要素表示で比較せよ.

練習問題 1.5.1-4 次の 4 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ が同一平面上にある場合の十分条件が, 次式であることを示せ.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

練習問題 1.5.1-5 正則行列な行列 $\mathbf{P}$ について $\mathbf{P}^{-1}$ を求め, $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{E}$ となることを示せ. ただし, 行列 $\mathbf{P}$ を次のように書くものとする. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

練習問題 1.5.2-1 式 1.5.2-4 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ について, 3 次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ と置き換えて計算せよ. また, 同様に, 式 1.5.2-5, 式 1.5.2-6 も計算せよ.

練習問題 1.5.2-2 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$, $\mathbf{c} = (7, 8, 9)$ で表されるベクトルを用いて, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ をそれぞれ計算せよ.

練習問題 1.5.2-3 次の 4 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ が同一平面上にある場合の十分条件を求めよ.

1.6. 連立 1 次方程式

練習問題 1.6.2-1 次の 2 元 1 次方程式をクラメールの式を用いて解け.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \quad \text{ただし, } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \text{ である.}$$

練習問題 1.6.2-2 次の正則な行列 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (|\mathbf{A}| \neq 0)$$

の要素が係数となっている次の 3 元 1 次方程式をクラメールの式により, 行列式形式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

練習問題 1.6.2-3 ω を $x^3 = 1$ の $x = 1$ 以外の解の 1 つとすると, 次式を満たす x, y, z 解を求めよ.

$$\begin{aligned} x + \omega y + z &= 1 \\ \omega x + y + \omega^2 z &= 1 \\ x + \omega^2 y + z &= 1 \end{aligned}$$

練習問題 1.6.2-4 次の行列 $\mathbf{A}$, ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ があって,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} \quad (abc \neq 0), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

について, 方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ の解 $\mathbf{x}$ を議論せよ.

練習問題 1.6.2-5 次の正則な行列 $\mathbf{A}$, 零ベクトルでないベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ があって,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

について, 方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{p}$ の解が, 次のクラメールの式で表されることを示せ.

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T = (|\mathbf{A}_1|/|\mathbf{A}| \quad |\mathbf{A}_2|/|\mathbf{A}| \quad |\mathbf{A}_3|/|\mathbf{A}|)^T$$

練習問題 1.6.3-1 2 次の 2 次の正方行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

が正則行列であって、

- (1) 行列 $\mathbf{P}$ の余因子行列 $\tilde{\mathbf{P}}$ 、および、逆行列 $\mathbf{P}^{-1}$ を要素で表せ。また、 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{E}$ を要素を用いて確かめよ。
- (2) 上記、正則行列 $\mathbf{P}$ について、 $|\tilde{\mathbf{P}}| = |\mathbf{P}|$ を確かめよ。

練習問題 1.6.3-2 2 次の 2 次の正方行列 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ を

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

で表し、ともに正則行列であるとき、次式を要素を用いて証明せよ

- (1) $(\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$ (2) $(\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \mathbf{P}$
- (3) $(\mathbf{P}^{-1})^T = (\mathbf{P}^T)^{-1}$ (4) $(\tilde{\mathbf{P}})^{-1} = |\mathbf{P}|^{-1}\mathbf{P}$
- (5) $|\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{P}|^{-1}$

練習問題 1.6.3-3 n 次行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は正則行列であって、適当な行列 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ により、

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{YA} = \mathbf{B}$$

が成り立つとき、 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ならば、 $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ であることを示せ。

練習問題 1.6.4-1 式 1.6.4-4 を導出する別の方法を試行せよ。

練習問題 1.6.4-2 次の方程式を掃き出し法で解け。

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

練習問題 1.6.4-3 次の 2 つ方程式を掃き出し法で同時に解け。

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

演習問題 第1章

- 1-1. ブール代数において, $(a+b) \cdot (a+c) = a+b \cdot c$ を証明せよ.
- 1-2. 空間にある互いに平行ではなく, 零ベクトルでもないベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に関する結合法則 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ を成分表示を用いず, 幾何的に証明せよ.
- 1-3. ベクトルのノルムに関して, 以下の式を証明せよ. ただし, $k \in \mathbb{R}$ とする.
- (1) $\|k\mathbf{a}\| = |k|\|\mathbf{a}\|$ (2) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
- 1-4. 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB を任意に同比 $m:n$ に分ける点をそれぞれ P, Q, R とするとき, 三角形 ABC および三角形 PQR の重心が一致することを示せ.
- 1-5. 三角形 ABC の各頂点 A, B, C の位置ベクトルを, それぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とするとき, 三角形 ABC の内心 I の位置ベクトル $\mathbf{i}$ を位置ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ で表せ.
- 1-6. 単位ベクトル $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0), \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ について, 1 次独立であること, また $\mathbf{e}_x \perp \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y \perp \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z \perp \mathbf{e}_x$ であることをそれぞれ示せ.
- 1-7. n 個の要素を持つ単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ について, 直交性すなわち, $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$ ($i \neq j; i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$) であることを示せ.
- 1-8. 零ベクトルでないベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が同一平面上にあって, 起点を同じくして三角形の2辺である場合, そのなす角を θ とするとき, 第2余弦定理をベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を用いて表せ. また, そのベクトルの要素を $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ とするとき, 内積に関する式を要素で示したとき, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ であることを示せ.
- 1-9. 長方形を5等分, 7等分, また, 9等分する方法を考えよ.
- 1-10. 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について, $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ である行列 $\mathbf{C}$ は $m \times \ell$ の行列であり, その i, j 成分 c_{ij} が行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の要素により, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, \ell$) であることを示せ.
- $$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n}, \quad \mathbf{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}}_{n \times \ell}$$
- 1-11. 3 正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について, ${}^6 D = |\mathbf{AB}|$ (式 1.4.4-10 参照) であることを示せ.
- 1-12. n 次の正方行列 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$) について, 積 $\mathbf{A}\Delta$, また, $\Delta\mathbf{A}$ を求めよ. ただし, $\Delta = \{\delta_{ij}\}$ であり, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.
- 1-13. 1 次独立な3つの3次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$ であることを要素表現で証明せよ.
- 1-14. ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ について, 次式を証明せよ.
- $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$
- 1-15. 例えば, 3 次の行列式を展開すると項数は9つである. では, n 次の行列式を展開した場合, 項数はいくつあるかを n で表せ.

應用編

群・環・整域・体

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

ベクトルや行列は、第 1 章で見てきたように、ベクトルや行列に関して加法（減法も含める）、乗法（除法も含める）の演算法の定義を行いました。そして、ベクトルや行列には、「数」のような性質をもち、また、ある場合には「数」のようでない性質を持っていることがお分かりになったと思います。このような性質をある「集合」の性質として考え、その諸性質を一般的な考えでまとめることは、演算の複雑さを整理することにほかなりません。以下で述べる中には、読者にとって、聞いたことがない言葉もあるでしょうけれど、単なる、決め事あるいは定義であって、恐れるに足らずと思って、ああ、そうなんですか！と読み流していただければ良いと思います。初めて知る方にとっては、逆に面白いかもしれませんよ。

ここでちょっとコメントさせてください。本章では「要素」と「元」が混在していますが、本質的にはなんら違いはありません。使い分けは、著者の「なんとなく」の感覚で使い分けしている部分もありますが、...（笑）、慣例に従って用いているとご理解ください。例えば、方程式関連では、2 元 1 次方程式のように、「元」を未知数の数（かず）の意味で使います。因みに、2 要素 1 次方程式とは言いませんよね（笑）。ベクトルや行列では、要素と呼び、元とは言いません。ここで紹介する問題はややこしい問題は避け、基本問題を集めました。

では、Bon voyage !



2.1. 群

定義 20 有限集合・無限集合

集合 A を、 n 個の要素を持つ集合、すなわち、 $A = \{a_i\} (i=1, 2, \dots, n)$ である場合、 A は有限集合 (finite set) と呼び、 $a_i \in A (i=1, 2, \dots, n)$ とも書く。それに対して、無限個の要素を持つ集合を無限集合 (infinite set) と呼ぶ。

定義 21 群 G

集合 (set) S の任意の要素 a, b ($\forall a, b \in S$) について、演算により一意的に集合 S の要素 p が存在する ($\exists p \in S$) 場合、 $p = a + b$ と書いて要素の「和」と呼び、 $p = ab$ と書いて要素の「積」と呼ぶ。一般的に、積は必ずしも可換 ($\rightarrow$ アーベル群) ではない。このとき、

(条件 1_G) 集合 S の任意の要素 a, b について、積 ab は集合 S の要素として存在する。

これを、 $\forall a, b \in S \Rightarrow \exists ab \in S$ と書く。

例：1.5 と 4.0 は実数で、その積 6.0 も実数。

(条件 2_G) $\forall a, b, c \in S$ について、結合法則 $(ab)c = a(bc)$ が成立する。

例：1.5, 4.0, 2.0 は実数で、 $(1.5 \times 4.0) \times 2.0 = 1.5 \times (4.0 \times 2.0)$ が成立。

(条件 3_G) $\forall a \in S$ について、 $a^R e = a$ となる右単位元 $^R e$ (right unit element) が、少なくとも 1 つ、集合 S の要素として存在する。

これを、 $\forall a \in S, a^R e = a \Rightarrow \exists ^R e \in S$ と書く。

例： $2.5 \times 1.0 = 2.5$ で、1.0 が右単位元である。

(条件 4_G) $\forall a \in S$ について、 $ax = ^R e$ (右単位元) となる右逆元 $^R x$ (right inverse element) が少なくとも 1 つ、集合 S の要素として存在する。

これを、 $\forall a \in S, a^R x = ^R e \Rightarrow \exists ^R x = a^{-1} \in S$ と書く。

例： $2.5 \times 0.4 = 1.0$ で、2.5 の右逆元が 0.4 ($= 2.5^{-1}$)。

という条件が成立する集合 S は群 G をなす、と言う。

定義 22 可換群, 加群 G_A

(条件 5_G) 集合 S の任意の要素、例えば、 a, b について、 $ab = ba$ である場合、集合 S は可換群 (commutative group) あるいはアーベル群 (Abelian group) を成す、と言う。このとき、可換群の要素は互いに交換可能 (commutable) である、と言う。また、加法に関して交換可能 ($a + b = b + a$) な場合は、特に、加群 (additive group) を成す、と言う。

定義 23 有限群, 位数, 無限群

(条件 6_G) 集合 S が有限個の要素で群 G を成すとき、群 G は有限群 (finite group) と呼ばれ、その要素数 n を $|G| = n$ または $\text{ord}(G)$ と書いて群 G の位数 (order) と呼ぶ。また、集合 S の要素が無数個の要素で群 G を成す場合、群 G を無限群 (infinite group) と呼ぶ。

定義 24 巡回群

群 G_C の全ての要素が, $\forall a^n \in G_C; n \in \mathbb{N}$ (整数) である群 G_C を巡回群 (cyclic group) と呼ぶ. 巡回群は可換群である.

ここで, 特に, a を巡回群 G_C の生成元 (generating element) と呼ぶ.

定義 25 半群

集合 S の任意の要素 $\forall a, b, c \in S$ で $a * b \in S$ についての演算:

$(a * b) * c = a * (b * c) \in S$ を満足する集合 S は半群 G_H (semigroup) を成す, という.

定理1 群要素

(条件 6_G) 群 G の要素で, $\forall a, b \in G$ に対して, $ax = b, ya = b$ を満たす x, y が存在する ($\exists x, y \in G$).

定理2 有限群

(条件 7_G) 有限群 G について, 要素 $a, b \in G$ が $a = b$ である場合, 任意の x に対して, $ax = bx, xa = xb$ である. これを簡約法則 (cancellation law) と呼ぶ.

定義 26 アーベル群

ある集合 Φ があって, その任意の元 $\forall a, b \in \Phi$ に対し, 以下のように, 記号「 $*$ 」により, 二項演算が定義され,

- (1_A) $\forall a, b, c \in \Phi$ に対して, 結合法則 $a * (b * c) = (a * b) * c$ が成り立つ
- (2_A) $\forall a, b \in \Phi$ に対して, 交換法則 $a * b = b * a$ が成り立つ (可換です)
- (3_A) 単位元 $\exists e \in \Phi$ があって, $a * e = e * a = a$ が成り立つ
- (4_A) $\forall a \in \Phi$ の逆元 $\exists a^{-1} \in \Phi$ があって, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ が成り立つ

定義 27 アーベル群での加法

ある集合 Φ があって, その任意の元 $\forall a, b \in \Phi$ に対し, 記号「 $+$ 」で加法が定義され,

- (1_{A+}) $\forall a, b, c \in \Phi$ に対して, 結合法則 $a + (b + c) = (a + b) + c$ が成り立つ
- (2_{A+}) $\forall a, b \in \Phi$ に対して, 交換法則 $a + b = b + a$ が成り立つ (可換)
- (3_{A+}) 零元 $\exists 0 \in \Phi$ があって, $a + 0 = 0 + a = a$ が成り立つ
- (4_{A+}) $\forall a \in \Phi$ のマイナス元 $\exists (-a) \in \Phi$ があり, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ が成り立つ

練習問題 2.1.2-1 $a \in G$ なる a について $a = aa$ または $aa = a$ ならば, いずれの場合も $a = e$ であることを示せ.

練習問題 2.1.2-2 $\forall a, b, c \in G$ なる a, b, c について, $ab = ac$ ならば $b = c$ であることを示せ.

練習問題 2.1.2-3 $\forall a, b \in G$ なる a, b について, $ab = e$ ならば, $b = a^{-1}$ あるいは $a = b^{-1}$ であることを示せ.

練習問題 2.1.2-4 $\forall a \in G$ なる a について, $(a^{-1})^{-1} = a$ を示せ.

練習問題 2.1.2-5 群の位数 (order) はその濃度, すなわち, その集合に入っている元の個数である. 単位群 $E = \{e\}$ の位相. また, 群 $G = \{1, 2, 3\}$ の位数をそれぞれ答えよ.

定義 28 部分群 G_S

群を成す集合 Θ の空 $\emptyset$ でない部分集合 Φ が Θ と同じ計算方法に関して群となると, 集合 Φ は群 Θ の部分群 $G_S(\text{subgroup})$ を成す, と言う. 集合論では, $\Phi \subseteq \Theta$ と書く.

定義 29 単位群 G_U

群 G が持つ単位元 e だけが要素の部分群を単位群 $G_U(\text{unit group})$ と呼ぶ.

定理3 集合 S が集合 G の部分集合であり, 集合 S が群 G の部分群 G_S であるための条件は,

$$(\text{条件 } 1_{G_S}) \quad \forall a, b \in S \Rightarrow \exists ab \in S$$

$$(\text{条件 } 2_{G_S}) \quad \forall a \in S \Rightarrow \exists a^{-1} \in S$$

であることである.

定理4 集合 S が集合 G の部分集合であり, 集合 S が群 G の部分群 G_S であるための条件は,

$$(\text{条件 } 3_{G_S}) \quad \forall a, b \in S \Rightarrow \exists ab^{-1} \in S$$

であることである.

定義 30 剰余類

P が群 G の部分群である場合, 要素 $a \in G$ について,

$$Pa = \{pa \mid p \in P\} \quad \text{および} \quad aP = \{ap \mid p \in P\}$$

と書いて, それぞれ, P に関する右剰余類(right coset)および左剰余類(left coset)と呼ぶ.

定義 31 共役

群 G の $\forall a, b \in G$ について,

$$b = x^{-1}ax \Rightarrow \exists x \in G$$

の場合, $a, b \in G$ は共役であるという.

定義 32 共役部分群

P を群 G の部分群とすると、 $\forall a \in G$ に対して、

$$a^{-1}Pa = \{a^{-1}pa \mid p \in P\}$$

で表される群は群 G の部分群であり、共役部分群と言う

練習問題 2.1.3-1 P が群 G の部分群である場合、 P の単位元 e_P は群 G の単位元 e_G に等しいことを証明せよ。

練習問題 2.1.3-2 P が群 G の部分群である場合、 $p \in P$ の逆元 p^{-1} は、 $p \in G$ の逆元に等しいことを証明せよ。

2.2.環・整域・体

定義 33 環 R

集合 R の任意の要素 a, b に対して、加法「+」および乗法「 $\cdot$ 」の演算が存在し、
 (条件 1_R) 加法+についてアーベル群 (項 2.1.3) であり、 $a+b=b+a$ で加群をなし、
 (条件 2_R) 乗法 $\cdot$ について、 $(ab)c=a(bc)$ であり、結合法則が成立し、
 (条件 3_R) 分配法則について $(a+b)c=ac+bc$ および $c(a+b)=ca+cb$ が成立する、
 という条件を満たすとき、集合 R は $\forall a, b, c \in R$ に対し、加法「+」および乗法「 $\cdot$ 」の演算に関して R は環 (ring) をなす、と言う、

定義 34 環 R における交換法則

$\forall a, b \in R$ である a, b について

$$ab=ba$$

が成立する場合は、集合 R は可換環 (commutative ring) , と言う。

定義 35 環 R における乗法の単位元

$\forall a \in R$ に対して、

$$ae=ea=a$$

なる e が存在するとき ($\exists e \in R$) はただ 1 つあって、 e を単位元 (unit element) , と言う。

定義 36 環 R における零因子 (zero-factor)

環 R において、 $a \neq 0$ および $b \neq 0$ であっても、 $ab=0$ となる場合に、 a, b を零因子と呼ぶ。ここで、零因子ではない元は正則である (regular) , または、非零因子 (non-zero-divisor) という。非零因子 (non-zero-divisor) は、非自明な零因子 (nontrivial zero divisor) とも呼ぶ。

定義 37 環 R における加法の零元および逆元

加法に関する単位元を 0 と書いて零元, という. また, $\forall a \in R$ について, $-a$ が存在し, これを加法に関する逆元, という.

定義 38 部分環 R_S

環を成す集合 Θ の空でない部分集合 Φ が環 Θ と同じ計算方法に関して環を成し, しかも, 環 Θ の単位元を含むとき, 集合 Φ は環 Θ の部分環 R_S を成す, という.

定義 39 零環または自明環

零環 $R_0 = \{0\}$ または自明環とは, 1 つの元からなる (同型を除いて) 唯一の環として定義され, 一元集合 $\{0\}$ において演算「 $+$ 」および「 $\cdot$ 」を,

$$0+0=0 \quad \text{と} \quad 0 \cdot 0=0,$$

したがって,

$$0 \cdot (0+0) = (0+0) \cdot 0 = 0$$

で定義したものを言う.

定義 40 整域 R_I

単位元を持つ可換環で, その任意の非零元の積は零とならない環を整域 R_I とする.

$$\forall a(\neq 0), b(\neq 0) \in R \Rightarrow \exists ab(\neq 0) \in R$$

言い換えれば, 零因子のない可換環, あるいは, 自明環でない可換環を, 整域と言う.

定義 41 体 F

0 以外の要素を持つ環 R において, 要素全体の積が群 G を成すとき,

$$a(\neq 0), b(\neq 0) \in R \Rightarrow ab \in G$$

であり, また, 分配法則 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ が成り立つ, さらに,

$0 \neq \forall a \in R \Rightarrow \exists -a \in R; \exists a^{-1} \in R$ (加法および乗法の逆元が存在する), となる場合, 体 F を成す, という.

定義 42 単位的環 A

$\forall a, b, c \in A$ の二項ないし三項の加法・乗法の演算 ($+$ および $\cdot$ (省略可能)) を持つ代数系であり,

条件 1_{UR}) 加法の可換性: に対して が成立 $a+b=b+a$

条件 2_{UR}) 加法の結合性: に対して $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成立

条件 3_{UR}) 加法単位元: $0 \in A$ が存在し, $\forall a \in A$ に対して, $a+0=0+a=a$ を満す

条件 4_{UR}) 加法逆元: $a+(-a)=(-a)+a=0$ となる $\forall (-a) \in A$

条件 5_{UR}) 乗法の可換性: $a \cdot b = b \cdot a$ が成立

条件 6_{UR}) 乗法の結合性: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $(ab)c = a(bc)$ が成立

条件 7_{UR}) 乗法単位元: $1 \in A$, $\forall a \in A$ に対し, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ を満す

条件 8_{UR}) 左右分配性: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ あるいは $a(b + c) = ab + ac$ が成立
 および, $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ あるいは $(a + b)c = ac + bc$ が成立

定義 43 部分体 F_S

体を成す集合 θ の部分集合 ϕ が θ と同じ計算方法に関して体を成し, $\forall a (\neq 0) \in \theta$ について, $\exists a^{-1} \in \theta$ のとき, 集合 ϕ は体 θ の部分体 F_S を成すと言う。

演習問題 第2章

- 2-1. 集合論において、集合 A 、集合 B および集合 C について、
 $(A \subseteq B) \cap (B \subseteq C)$ ならば $A \subseteq C$ であることを示せ。
- 2-2. 集合論において、集合 A および集合 B について、次式を示せ。
 (1) $(A \cap B \subseteq A) \cup (A \cap B \subseteq B)$ (2) $(A \subseteq A \cup B) \cup (B \subseteq A \cup B)$
- 2-3. 群をなす集合 G があって、 $\forall a, b \in G$ について $\exists ab \in G$ であり、 $a, b, c \in G$ について、 $a(bc) = (ab)c$ が成立することを示せ。
- 2-4. 群をなす G について、 $\forall a, b \in G$ なる a, b について、 $ax = b$ を満たす x は一意的に存在することを示せ。
- 2-5. 群 G において、以下が成り立つことを示せ
 (1) $\forall a \in G \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$ (2) $\forall a \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
 (3) $\forall a \in G, \exists p \in G \Rightarrow (ap = a) \vee (pa = a) \Leftrightarrow p = e \in G$
- 2-6. 2 つ元を持つ集合 $G = \{1, -1\}$ は群をなすことを示せ
- 2-7. 環 R において、 $a, b, c \in R$ のとき、次式を証明せよ。
 (1) $0a = a0 = 0$ (2) $a \cdot (-b) = (-a)b = -ab$ (3) $(-a)(-b) = ab$
- 2-8. $\forall p, q \in \mathfrak{R}$ (実数) に対して、次の形式の 2 次の行列は環を成すことを示せ。また、この環について左単位元は無限にあることを示せ。

$$\Psi = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、次の形式の 2 次の行列は環を成すことを示せ。また、この環について右単位元は無限にあることを示せ。

$$\Phi = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

- 2-9. $\forall p, q \in \mathfrak{R}$ に対して、次の形式の 2 次の行列の集合 Θ 、例えば、 $\Phi = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$

は、体 F を成し、集合 Θ における単位元 $\mathbf{E}$ があって、 $p \neq 0$ であるとき

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により逆元が集合 Θ にあることを示せ。

- 2-10. 可換環の場合、右零因子および左零因子は等しいことを示せ。
- 2-11. 環 R における $\forall a, b, c \in R; c \neq 0$ について、簡約法則 (cancellation law)
- $$ac = bc \text{ or } ca = cb \Leftrightarrow a = b$$

が成り立つことと、環 R に零因子がないことが同じであることを示せ。

- 2-12. 補題：例えば、群 G の要素 a について、 $a^m = a^n$ ($m > n$) の場合、 $a^{m-n} = e$ (e は G の単位元) となる自然数が存在し、 $\alpha = \min(m-n)$ なる α があって、 α を a の位数と呼ぶ場合がある。これを踏まえて、群 G の要素 a の位数を α とし、 $\exists k \in \mathbb{Z}$ があって、 $a^k = e$ となるための必要十分条件は k が α で割り切れることであることを証明せよ。

3. 線形代数 II

線形代数 II

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

行列は、第 1 章で見てきたように、行列に関して加法（減法も含める）、定数倍、乗法の演算法の定義を行いました。そして、行列は、「数」のような性質を持ち、また、ある場合には「変数」や「関数」となる性質も持っていることがお分かりになったと思います。

ところで、気が付いている読者はいらっしゃいますか？ 本書ではベクトル積は要素が 3 つ、すなわち、 $\forall \mathbf{a} \in V^3$ のベクトルにだけ限定しています。2 つのベクトル $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ の「外積」と「ベクトル積」は、3 次元空間を扱う、物理やベクトル解析の教科書では、2 つの言葉を、特に断らず、特に区別せずに、というよりは隠蔽して（これは言い過ぎ、笑）、同一のものであるとして使っています。

実は、そうではないのです。本来、4 次以上の高次のベクトルを扱う数学の世界では、「外積」と「ベクトル積」は別々の概念であり、実際 4 次元以上の空間では異なった表式を用います。「外積代数（exterior algebra）」とか「グラスマン代数（Grassman algebra）」（古典幾何学を 4 次元以上の n 次元幾何学へと一般化した『広延論』の中で述べられている）という代数体系があります。それらは、工学や理学ではお目にかかることはなく、本書の読者や著者にとっては 3 次元ユークリッド幾何学空間（非ユークリッド幾何やアインシュタインの相対性理論に出てくるような曲がった空間ではない空間）で十分ではないでしょうか。3 次元ユークリッド幾何学空間の分野だけでも、多くの難しい世界が広がっているのです。これらを知っていることだけでも読者自身の宝になります。

请做一个好的旅程。



3.1. 行列 II

定義 44 零因子 (zero divisor)

零行列 $\mathbf{O}$ ではない 2 つの行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ があって, $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ となる場合, 行列 $\mathbf{A}$ は行列 $\mathbf{B}$ の左零因子と呼ぶ. 逆に, 行列 $\mathbf{B}$ は行列 $\mathbf{A}$ の右零因子と呼ぶ.

練習問題 3.1.1-1 次の行列 $\mathbf{A}$ および行列 $\mathbf{B}$ について $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

であるとき, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$ および $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ であることを示せ.

練習問題 3.1.1-2 行列 $\mathbf{A}$ について零行列 $\mathbf{O}$ ではない右零因子の 1 つを示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.1.1-3 行列 $\mathbf{A}$ および行列 $\mathbf{B}$ が 2×2 型である場合, 互いに零因子になっている場合, 行列 $\mathbf{A}$ および行列 $\mathbf{B}$ の例を示せ.

練習問題 3.1.1-4 次の行列 $\mathbf{A}$ の右零因子行列が次の行列 $\mathbf{B}$ であることを示し, 行列 $\mathbf{B}$ は左零因子行列にはならないことを示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.1.2-1 次の 2 次の正方行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ について, $\begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|$

であることを示せ. ただし, $\mathbf{E}$ は 2 次の単位行列, $\mathbf{O}$ は 2 次の零行列である.

練習問題 3.1.2-2 次の n 次の正方行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ について, $\begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{B}|$

であることを示せ. ただし, $\mathbf{E}$ は n 次の単位行列, $\mathbf{O}$ は n 次の零行列である.

練習問題 3.1.3-1 次の行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ について,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ および $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ をそれぞれ要素の表式で求め. 等しいことを示せ.

練習問題 3.1.3-2 次の行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ について,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ および $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ をそれぞれ要素の表式で求め、等しいことを示せ.

3.2.固有値 I

定義 45 固有ベクトル

n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ および, n 次のベクトル $\mathbf{p}$ ($\|\mathbf{p}\| \neq 0$) があって,

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$$

を満たすスカラー λ がある場合, ベクトル $\mathbf{p}$ をスカラー λ に関する行列 $\mathbf{A}$ の固有ベクトル (eigen vector) と言う.

定義 46 固有値 λ

行列 $\mathbf{A}$ が n 次の正方行列であるとき, 行列式 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ はスカラー λ に関する n 次の方程式であって,

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$$

を満たすスカラー λ を行列 $\mathbf{A}$ の固有値 (特性値, eigen value), また, 式 3.2.2-1 を行列 $\mathbf{A}$ の固有方程式 (特性方程式) *characteristic equation* と呼ぶ.

練習問題 3.2.2-1 次の 2 次行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{p}$ を求め, $\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ が成り立つかを確かめよ.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

定義 47 行列の相似

行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ が n 次の行列であるとし, 同じ n 次の任意の正則行列 $\mathbf{P}$ により,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

という式で表すことができるとき, 行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は互いに相似 (similitude) であるという.

練習問題 3.2.5-1 次の行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ について, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を計算し, $\mathbf{A} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$ すなわち, $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$ となることを示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.2.5-2 n 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が, 正則な n 次の行列 $\mathbf{P}$ について, 相似ならば, $\mathbf{A}^\alpha, \mathbf{B}^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{N}$) も相似であることを示せ. また, 行列 $\mathbf{A}$ の整式 $f(\mathbf{A})$ について, $f(\mathbf{A}), f(\mathbf{B})$ は相似であることを示せ.

練習問題 3.2.6-1 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が相似であるとき, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ であることを示せ.

練習問題 3.2.6-2 n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ について, $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$ は列 $\mathbf{A}$ の第 j 列目を要素とするベクトルであることを確かめよ. ただし, $\mathbf{e}_j$ は, 第 j 行目が 1 で, 他の要素が全て 0 である単位ベクトルである. すなわち, $\mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-j})$ を表す.

練習問題 3.2.6-3 つぎの行列 $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値および固有ベクトルを求め,

固有ベクトルを縦ベクトルとする $\mathbf{P}$ により, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を計算し, 行列 $\mathbf{A}$ が対角行列になっていることを示せ.

練習問題 3.2.6-4 つぎの行列 $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値および固有ベクトルを求め,

固有ベクトルを縦ベクトルとする $\mathbf{P}$ により, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を計算し, 行列 $\mathbf{A}$ が対角行列になっていることを示せ.

練習問題 3.2.7-1 次式の「…」を埋めよ.

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dots = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -35 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.2.7-2 例題 3.2.6-3 の固有(列)ベクトルを交換し, すなわち,

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \Rightarrow \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{11} \\ p_{22} & p_{21} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ を計算し, 例題 3.2.6-3 の結果と比較せよ.

練習問題 3.2.7-3 次の行列 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

について、固有値、固有ベクトルを求め、固有ベクトルで構成する行列 $\mathbf{P}$ で、行列 $\mathbf{A}$ が演算 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ によって対角化されることを示せ。また、練習問題 3.2.7-2 と同様、行列 $\mathbf{P}$ の列（行列 $\mathbf{A}$ の固有ベクトル）を入れ替えた行列 $\mathbf{Q}$ 、すなわち、

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \Rightarrow \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{11} \\ p_{22} & p_{21} \end{pmatrix}$$

すなわち、とすると、 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ を計算し、 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ の結果を比較せよ。

3.3. ケーリー・ハミルトンの定理

定理5 ケーリー・ハミルトンの定理

n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ があって、行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ 、単位行列 $\mathbf{E}$ とで構成する行列式 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ を固有値 λ の関数 $\phi(\lambda)$ と考えたとき、 $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ となる。

練習問題 3.3.3-1 次の行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ について、ケーリー・ハミルトンの定理を用いて $\mathbf{A}^2$ を計算せよ。

練習問題 3.3.3-2 次の行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について、ケーリー・ハミルトンの定理を用いて $\mathbf{A}^3$ を計算せよ。

3.4. 複素行列

定義 48 複素ベクトルの内積（エルミート内積）

複素数 $\forall \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}$ について、 $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^T \overline{\mathbf{w}} = |\mathbf{z}| |\mathbf{w}| \cos \theta$ と計算する。ここで、 $*$ は随伴を意味し、転置して共役とすることを意味する

定理6 複素数ベクトルの内積の性質

複素数ベクトルを $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ とするとき、以下が成り立つ

- 1) 交換法則 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- 2) 分配法則 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$; $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- 3) 結合法則（定義 48 による） $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \overline{(\lambda \mathbf{a})}^T \mathbf{b} = \overline{\lambda} \overline{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} = \overline{\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
 $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \overline{\mathbf{a}}^T (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \overline{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- 4) 長さ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow 0 < \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \overline{\mathbf{a}}^T \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \in \mathbb{R}$

定理7 転置行列, 複素共役行列, 随伴行列の性質

それぞれ, $m \times n$ 型, $n \times \ell$ 型の複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ および $\forall p \in \mathbf{C}$ である複素数, $\forall k \in \mathfrak{R}$ である実定数について, 以下の式が成り立つ.

$$1) (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad 2) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad 3) (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad 4) (k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

であり, 複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が, 行列の型など $\cdot$ 積が定義できる場合,

$$5) \overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A} \quad 6) \overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} \quad 7) \overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{B}} \quad 8) \overline{p\mathbf{A}} = \overline{p} \overline{\mathbf{A}}$$

$$9) \mathbf{A}^* = \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} \text{ は実行列}) \quad 10) (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \quad 11) (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$$

$$12) (\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^* \quad 13) (p\mathbf{A})^* = \overline{p} \mathbf{A}^*$$

練習問題 3.4.1-1 n 次の複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について, $(\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}})^T = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$ であることを示せ.

練習問題 3.4.1-2 n 次の複素行列 $\mathbf{A}$ について, $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$ あることを示せ.

練習問題 3.4.1-3 n 次の複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$ あることを示せ.

練習問題 3.4.1-4 複素ベクトルの内積を $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}}^T \mathbf{w}$ と定義するとき,

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \overline{\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ を証明せよ.}$$

また, 複素ベクトルの内積を $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z} \overline{\mathbf{w}}^T$ と定義すると, どうなるか?

練習問題 3.4.1-5 2 次の複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

要素の行列配置を用いて, $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{B}}$ を示せ.

練習問題 3.4.1-6 2 次の複素行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

要素の行列配置を用いて, $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$ を示せ.

練習問題 3.4.1-7 2 次の複素行列 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

および複素数 $p \in \mathbf{C}$ について, 要素の行列配置を用いて, $(p\mathbf{A})^* = \overline{p} \mathbf{A}^*$ を示せ.

定義 49 エルミート行列 (Hermitian matrix)

複素行列 $\mathbf{A}$ があって、その随伴行列 $\mathbf{A}^*$ との関係において、

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \quad \text{あるいは、} \quad \overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$$

を満たす行列をエルミート行列 (Hermitian matrix) という。自己随伴行列 (self-adjoint matrix) ともいいます。

練習問題 3.4.2-1 n 次の実行列 $\mathbf{A}$ が、 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ (交代行列) であるとき、行列 $i\mathbf{A}$ は、エルミート行列であることを示せ。

練習問題 3.4.2-2 以下の行列 $\mathbf{A}$ はエルミート行列であるか？

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

定義 50 交代エルミート行列, 反エルミート行列あるいは歪エルミート行列

行列 $\mathbf{A}$ があって、その随伴行列 $\mathbf{A}^*$ に対して、

$$\mathbf{A}^* = -\mathbf{A} \quad \text{あるいは、} \quad \overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$$

を満たす行列を交代エルミート行列 (alternative-Hermitian matrix), 反エルミート行列 (anti-Hermitian matrix) あるいは、歪エルミート行列 (skew-Hermitian matrix) と呼ぶ。

練習問題 3.4.3-1 n 次の実行列 $\mathbf{A}$ が、 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ (対称行列) であるときは、行列 $i\mathbf{A}$ は、交代エルミート行列であることを示せ。

練習問題 3.4.3-2 以下の行列 $\mathbf{A}$ は交代エルミート行列であるか？

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

定義 51 ユニタリー行列

正方行列 $\mathbf{U}$ が、正則行列 ($|\mathbf{U}| \neq 0$) であって

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^* = \overline{\mathbf{U}}^T$$

である場合、 $\mathbf{U}$ をユニタリー行列 (Unitary Matrix) と呼ぶ。

練習問題 3.4.4-1 行列 $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ がユニタリー行列であることを示せ。

練習問題 3.4.4-2 行列 $\mathbf{H}$ (1) について、①行列 $\mathbf{H}$ がエルミート行列であることを示し、②固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を計算し、③以下の (2) を満たすユニタリー行列 $\mathbf{U}$ を求めよ。

$$(1) \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.4.4-3 次の行列 $\mathbf{U}$ がユニタリー行列であることを示し、次のベクトル $\mathbf{x}$ があって、 $P = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{U} \mathbf{x}$ を計算せよ。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

練習問題 3.4.4-4 n 次のユニタリー行列 $\mathbf{U}$ の n 個の固有ベクトルが互いに直交することを示せ。

練習問題 3.4.4-5 行列 $\mathbf{U}$ がユニタリー行列であれば、 $\mathbf{U}^*$ もまた、ユニタリー行列であることを示せ。

定義 52 正規行列

行列 $\mathbf{A}$ があって、

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^* \quad \text{あるいは、} \quad \overline{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \overline{\mathbf{A}}^T$$

を満たす行列を正規行列 (*normal matrix*) と呼ぶ。

練習問題 3.4.5-1 要素が実数の対称行列は正規行列であることを示せ。

練習問題 3.4.5-2 ユニタリー行列 $\mathbf{U}$ は単位円上に固有値を持つ正規行列であることを示せ。

練習問題 3.4.5-3 ある正方行列 $\mathbf{A}$ がユニタリー行列 $\mathbf{U}$ で対角化可能で Ξ :

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \end{pmatrix}$$

3.5. 2次形式

定義 53 2次形式

n 次の複素ベクトル $\mathbf{x}$ および n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ について、

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

で表す表式を2次形式 (*quadratic form*) と呼び、スカラーかスカラー関数となる。

定義 54 エルミート行列の2次形式

要素が複素数であるエルミート行列、 $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ あるいは $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^T$ について、複素ベクトル $\mathbf{x}$ があるとき、

$$H = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$$

と書いて、単に、エルミート形式 (*Hermitian form*) と呼び、常に実数を得る。

定理8 複素ベクトル $\mathbf{x}$ について、エルミート行列 $\mathbf{H}$ による
エルミート形式の値 $H = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ は、常に実数である。

定義 55 交代エルミート行列の2次形式

行列 $\mathbf{J}$ を交代エルミート行列とし、複素ベクトル $\mathbf{x}$ により

$$J = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{J} \mathbf{x}$$

と構成される形式を、単に、交代エルミート形式 (Skew-Hermitian form) と呼ぶ。

定理9 複素ベクトル $\mathbf{x}$ について、交代エルミート行列 $\mathbf{J}$ による交代エルミート
形式の値は純虚数かまたは0である。

練習問題 3.4.6-1 複素ベクトル $\mathbf{x}$ について、エルミート行列 $\mathbf{H}$ によるエルミート形式
 $H = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ の値は常に実数であることを示せ。

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.4.6-2 複素ベクトル $\mathbf{x}$ について、交代エルミート行列 $\mathbf{J}$ による交代エルミート
形式 $J = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{J} \mathbf{x}$ の値は純虚数かまたは0であることを示せ。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2i & i+1 \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}$$

演習問題 第3章

3-1. 次のエルミート行列 $\mathbf{H}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

3-2. 次の行列 $\mathbf{A}$ のついて, $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \phi(\lambda)$ と表すとき, $\phi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ を示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3-3. 以下の複素ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ があって,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}; \quad (z_i, w_j \in \mathbb{C} \mid i, j = 1, 2, \dots, n)$$

とするとき, (1) 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$, をそれぞれ要素で示せ.

3-4. n 次エルミート行列 $\mathbf{H}$ の行列式 $|\mathbf{H}|$ は実数であることを示せ.

3-5. n 次エルミート行列 $\mathbf{H}$ とユニタリー行列 $\mathbf{U}$ で作る $\mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U}$ はエルミート行列であることを示せ.

3-6. n 次任意の複素正方行列 $\mathbf{P}$ は, 複素行列 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ による次の和の形式, すなわち,

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2$$

として表せた場合, 行列 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ はエルミート行列であることを示せ.

3-7. n 次のユニタリー行列 $\mathbf{U}$ の行列式の絶対値は 1 であることを示せ.

3-8. n 次のエルミート行列 $\mathbf{U}$ が実行列の場合, 対称行列であることを示せ.

3-9. n 次のユニタリー行列 $\mathbf{U}$ が実行列の場合, 直交行列であることを示せ.

3-10. n 次の行列 $\mathbf{U}$ がユニタリー行列で, 単位行列 $\mathbf{E}$ について, $|\mathbf{E} + \mathbf{U}| \neq 0$ である場合,

$$\mathbf{A} = i \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1}$$

で表す行列 $\mathbf{A}$ がエルミート行列であることを示せ.

3-11. n 次の交代エルミート行列 $\mathbf{A}$ は, 正規行列であることを示せ.

3-12. n 次の正方行列 $\mathbf{H}$ がユニタリー行列 $\mathbf{U}$ により実対角行列 Φ となると, $\mathbf{H}$ はエルミート行列であることを示せ.

3-13. n 次のユニタリー行列 $\mathbf{U}$ の全体は乗法に関して群を成すことを示せ.

3-14. 2 次形式 $F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + d = 0$ が表すグラフを試作せよ.

3-15. 3 次の行列 $\mathbf{A}$ およびベクトル $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ により 2 次形式 $Q(\mathbf{x})$ の具体的な表式を示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 線形代数 III

線形代数 III

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

ベクトルは、第 1 章で見てきたように、ベクトルや行列に関して加法（減法も含める）、定数倍、乗法（除法も含める）の演算法の定義を行いました。そして、ベクトルや行列は、「数」のような性質をもち、また、ある場合には「数」のようでない性質を持っていることがお分かりになったと思います。ここでは、このような性質を、ある集合の性質として考え、その諸性質を一般的な考えでまとめます。このことは、演算の複雑さを整理することにほかなりません。以下で述べる「ベクトル空間」の説明の中には、読者にとって、聞いたことがない言葉もあるでしょうけれど、単なる、決め事あるいは定義であって、恐れるに足らずと思って、読み流していただければ良いと思います。逆に、初めて知る方にとっては面白いかもしれませんよ。困みに、「空間」は何かの隙間とか、宇宙という 3 次元空間ではなく、数学的に定義で決められた n 次元の概念で構成し、その中で演算が設定できる集合のことです。

ここで、線形代数のさらなる理解を希望します。何か、天皇陛下の言葉のようですが、著者の言葉です(笑)。

では、*Buon viaggio!*



4.1.ベクトル空間の基礎

定義 56 ベクトル空間 V

数体 K を $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ とし、ベクトルの集合 V があって、以下の 1_V から 9_V までの条件を満たすとき、ベクトルの集合 V は、数体 K の上のベクトル空間 V (vector space) と呼ぶ。

任意のベクトルを $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ 、任意のスカラー係数を $\forall \lambda, \mu \in K$ とし、それらの演算がベクトル空間を定義する条件は、

- (1_V) ベクトルの和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ が定義できて： $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ が成立、
- (2_V) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ が成立、
- (3_V) 任意の $\mathbf{a}$ について、 $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ である零ベクトル $\mathbf{0}$ が存在、
- (4_V) すべての $\mathbf{a}$ について、 $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ なる $\mathbf{x}$ が $\mathbf{x} = -\mathbf{a}$ として存在、
- (5_V) 実数のスカラー λ, μ とベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について $\lambda \mathbf{a}, \mu \mathbf{b}$ が定義可能、
- (6_V) 実数のスカラー λ, μ とベクトル $\mathbf{a}$ により、 $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$ が成立、
- (7_V) 実数のスカラー λ とベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ により、 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ が成立、
- (8_V) 実数のスカラー λ, μ とベクトル $\mathbf{a}$ により、 $(\lambda \mu) \mathbf{a} = \lambda(\mu \mathbf{a})$ が成立、
- (9_V) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ 、 $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ なる演算が成立、

定義 57 ベクトル部分空間

数体 K 上のベクトル空間 V の ϕ (空) でなく、ベクトル空間 V の零ベクトルを含む、部分集合 W が、以下の条件を満たすとき、 W は V のベクトル部分空間 (vector subspace) あるいは線形部分空間 (linear subspace) と言う。ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がベクトル部分空間 W の要素である場合、

- (1_W) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ ならば、 $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$
- (2_W) $\forall \mathbf{a} \in W, \lambda \in K$ ならば、 $\lambda \mathbf{a} \in W$

である。

定義 58 共通ベクトル部分空間

ベクトル空間 V の部分空間 W^1 および W^2 について、 $\mathbf{a} \in W^1$ であり、 $\mathbf{a} \in W^2$ であるベクトル $\mathbf{a}$ は、 $W = W^1 \cap W^2$ と表すベクトル空間 W を張り、

$$W = W^1 \cap W^2 = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in W^1, \mathbf{a} \in W^2\}$$

と書いて、ベクトル空間 W を部分空間 W^1 および W^2 の共通ベクトル部分空間と呼ぶ。

定義 59 ベクトル空間の直和

ベクトル空間の和空間とは、ベクトル空間 V の部分空間 W^1 および W^2 について、

$$W = W^1 + W^2 = \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_1 \in W^1, \mathbf{a}_2 \in W^2\}$$

で定義され、特に、 $W^1 \cap W^2 = \{\phi\}$ である場合、 $W = W^1 \oplus W^2$ と書いて、

ベクトル部分空間の直和 (direct sum) と呼ぶ。

練習問題 4.1.5-1 $W = \{\mathbf{x} = (x_1, 0, x_2, 0, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{R}\}$ は、5 次のベクトル空間 V^5 の部分空間であることを示せ。

練習問題 4.1.5-2 ベクトル空間 V の部分空間 W^1 および W^2 について、和空間 $W^1 + W^2$ はベクトル空間 V の部分ベクトル空間であることを示せ。

定義 60 ベクトル空間の次元

数体 K 上のベクトル空間 V の基底ベクトルが有限個であるとき V を有限次元ベクトル空間と呼び、このとき、(1 次独立な) 基底ベクトルの個数 (基底ベクトルのとり方にはよらない) をベクトル空間 V の次元 (*dimension*) と呼び、ベクトル空間 V を構成する基底ベクトルの個数が n である場合は、 $\dim V = n$ と書く。特に、零 (ベクトル) 空間 V_0 では、 $\dim V_0 = 0$ と定義する。基底ベクトルは、単に、空間の「基」と称する場合がある。

ベクトル空間 V の基底ベクトルが、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ である場合、

$$V = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$$

と書く表式があります。もちろん、このときは、 $\dim V = n$ である。

練習問題 4.1.6-1 ベクトル $\mathbf{a}_1 = (1 \ 1 \ 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0 \ 0 \ 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1 \ 1 \ 1)$ が張るベクトル空間 W の次元 $\dim W$ を求めよ。

練習問題 4.1.6-2 $m \times n$ の行列 $\mathbf{A}$ の張る空間 $V^{m \times n}$ の次元と基の 1 種を考えよ。

練習問題 4.1.6-3 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ (\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{R})$ が張るベクトル空間 R^2 (ベクトル空間 V の部分空間) について、その次元を答えよ。

練習問題 4.1.6-4 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \ (\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{R})$ が張るベクトル空間 R^3 (ベクトル空間 V の部分空間) について、その次元を答えよ。

定理10 ベクトル空間と次元 その1

$\dim V = n$ であるベクトル空間 V の部分空間 W について、 $\dim W = r \leq n$ とし、部分空間 W の基底ベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r$ とするとき、適当にベクトル $\mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n$ を加えて、 n 個のベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \mathbf{e}_{r+2}, \dots, \mathbf{e}_n$ を作り、ベクトル空間 V の基底ベクトルとすることができる。

定理11 ベクトル空間と次元 その2

ベクトル空間 V の部分空間を V_1, V_2 とするとき、

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

である。

定理12 ベクトル空間と次元 その3

ベクトル空間 V の部分空間を W_i ($i=1, 2, \dots, n$) とするとき,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^n W_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim W_i - \sum_{i=1}^{n-1} \dim\left[\left(\sum_{k=1}^i W_k\right) \cap W_{i+1}\right]$$

である。

練習問題 4.1.7-1 ベクトル空間 V^n において, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^n$, $\lambda, \mu, \xi, \nu \in \mathfrak{R}$ および $\xi \mathbf{a} = \mathbf{b}$ であるとき, 部分ベクトル空間 $W_1 = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ および $W_2 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ は $W_1 = W_2$ であることを示せ。

練習問題 4.1.7-2 ベクトル空間 V^n において, 部分ベクトル空間 W_1, W_2 の $W_1 \cap W_2$ について, $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ の場合, $\forall \mathbf{p} \in W_1 + W_2$ なるベクトル $\mathbf{p}$ は, $\exists \mathbf{p}_1 \in W_1, \exists \mathbf{p}_2 \in W_2$ であるベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の和 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ として一意的に表されることを示せ。ただし, ベクトル空間 V は, 体 K 上のベクトル空間である。

4.2. ベクトル III

定理13 ベクトルの大きさ

3次元ベクトル空間 V^3 で, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^3$ に対し, L^2 ノルムに関して

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_2 + \|\mathbf{b}\|_2 + \|\mathbf{c}\|_2$$

なる式が成立する。

定義 61 ベクトルの直積

m 次と n 次のベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^n$ に対して, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$ あるいは $\mathbf{a}\mathbf{b}^T$ と書いて,

直積 (direct product) と呼び, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ で表す。その結果は $m \times n$ 型の行列となる。

練習問題 4.2.2-1 ベクトル空間 V^3 における単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ について, $\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)^T$ を計算し, 3 次の任意の行列 $\mathbf{A}$ に対し, 積 $\mathbf{A}\mathbf{P}$ および $\mathbf{P}\mathbf{A}$ を計算し, 結果を比較せよ。

練習問題 4.2.2-2 ベクトル $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ について, $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ を計算せよ。

練習問題 4.2.2-3 ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ について, 直積が可換かを議論せよ。

練習問題 4.2.2-4 3 次の任意の行列 $\mathbf{A}$ に対し, 歪単位行列 $\mathbf{E}_{33}^0(2)$ を右から乗じた結果と左から乗じた結果を比較せよ.

練習問題 4.2.2-5 複素ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の直積で得られる行列 $\mathbf{A}$ の要素は複素ベクトル $\mathbf{u}$ の各成分と $\mathbf{v}$ の各成分の複素共役との積が成分となる. すなわち, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^*$ とする. そこで, 複素ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の要素表示を, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ とし, 各要素を $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ とする場合, 直積 $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ の表式を要素 u_1, u_2, v_1, v_2 で表せ.

定義 62 ウェッジ積

$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ を用いて, 2 つの直積の差を計算した結果をウェッジ積 $\wedge$ (wedge product) と呼び, 果たしてその表式は,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

である. ここで, ウェッジ積は楔 (くさび) 積とも言う,

定理 14 ウェッジ演算定理

さて, ウェッジ積の持つ性質は, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ とするとき,

- ① $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- ② $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ (交代行列)
- ③ $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mu \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$
- ④ $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^T = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

練習問題 4.2.3-1 ベクトル $\mathbf{a}(a_1, a_2)^T, \mathbf{b}(b_1, b_2)^T$ について,

- 1) $\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$ を示せ.
- 2) $\text{tr}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) = 0$ を示せ.

練習問題 4.2.3-2 2 ベクトル $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)^T, \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)^T$ について

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

を要素を用いて示せ.

定義 63 外積代数

外積代数とは, ベクトル空間の一種であり, ベクトル間のウェッジ積の演算表式を「 $\wedge$ 」で定義し, ベクトル $\mathbf{e}_i$ 間でこの演算を繰り返すことで得られるすべての元, すなわち,

$$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k, \dots$$

などを基底とするベクトル空間を扱う式形態を, 代数空間とする.

特に, ベクトル 3 つの場合, ウェッジ積の交換法則を,

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

と表す. ここで, ε_{ijk} は左辺の式, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ の符号を決める係数である.

定理15 外積代数で表される演算方法

$$\begin{array}{ll}
\text{交換法則} & \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_j \\
\text{結合法則} & \mathbf{e}_i \wedge (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \wedge \mathbf{e}_k \\
\text{分配法則} & \mathbf{e}_i \wedge (\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k
\end{array}$$

練習問題 4.2.4-1 ベクトル $\mathbf{a} = \{a_i\}$, $\mathbf{b} = \{b_i\}$, $\mathbf{c} = \{c_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) について, 定理 15 の式 4.2.4-7 (分配法則) $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ を証明しなさい.

練習問題 4.2.4-2 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ について, 係数を $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \rho, \sigma \in \mathfrak{R}$ とするとき, $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) \wedge (\mu \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \rho \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \sigma \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ を計算しなさい.

4.3. テンソル

定義 64 2 階のテンソル

2 階のテンソルとは, ベクトル空間 V の要素 $\forall \mathbf{a} \in V$ について, 関数 $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ があって, ベクトル $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ および係数 $\forall \alpha \in K$ に対して,

$$\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}(\mathbf{a}) + \mathbf{T}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{T}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{a})$$

を満たすとき $\mathbf{T}$ を 2 階のテンソル, または, 単にテンソルと呼ぶ.

定理16 テンソルの演算の公理

- (1) $\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{T}$
- (2) $\mathbf{T} + (\mathbf{S} + \mathbf{P}) = (\mathbf{T} + \mathbf{S}) + \mathbf{P}$
- (3) $\alpha(\beta \mathbf{T}) = (\alpha\beta) \mathbf{T}$
- (4) $\alpha(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \alpha \mathbf{T} + \alpha \mathbf{S}$
- (5) $(\alpha + \beta) \mathbf{T} = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{T}$
- (6) $1\mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad 0\mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} + \mathbf{0} = \mathbf{T}$
- (7) $\mathbf{T} - \mathbf{S} = \mathbf{T} + (-1)\mathbf{S} = \mathbf{T} + (-\mathbf{S})$

定義 65 テンソルの内積

テンソル $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) があって, ベクトル $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して, 内積を,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_{j=1}^3 T_{1j} a_j, \sum_{j=1}^3 T_{2j} a_j, \sum_{j=1}^3 T_{3j} a_j \right)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{T} = \left(\sum_{i=1}^3 b_i T_{i1}, \sum_{i=1}^3 b_i T_{i2}, \sum_{i=1}^3 b_i T_{i3} \right)$$

とする.

定義 66 対称・交代 テンソル

任意のテンソル $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) があって,

1) 対称テンソル (symmetric tensor) を以下のように書く:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2} \quad \therefore \quad \mathbf{S}^T = \left(\frac{\mathbf{T} + \mathbf{T}^T}{2} \right)^T = \frac{\mathbf{T}^T + \mathbf{T}}{2} = \mathbf{S}$$

2) 交代テンソル (alternating tensor) を以下のように書く:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} \quad \therefore \quad \mathbf{A}^T = \left(\frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} \right)^T = \frac{\mathbf{T}^T - \mathbf{T}}{2} = -\frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}^T}{2} = -\mathbf{A}$$

ここで, $\mathbf{T}^T$ は転置テンソル (transposed tensor) で, $\mathbf{T} = \{T_{ij}\}$ のとき, $\mathbf{T}^T = \{T_{ji}\}$ です。

4.4. 行列空間

定義 67 行列空間 M

数体 K を $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ とし, 行列の集合 M があって, 以下の 1_M から 9_M までの条件を満たすとき, 行列の集合 M は, 数体 K の上の行列空間 M (matrix space) と呼ぶ。

行列を $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M$ とし, 任意のスカラー係数を $\forall \lambda, \mu \in K$ とし, それらの演算を規定する公理は,

(1_M) $\exists (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \in M$ のとき, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ が成立, (交換法則)

(2_M) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ が成立, (結合法則)

(3_M) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$ であるとき, $\exists \mathbf{O} \in M$ である。

(4_M) $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{O}$ が成立するとき, $\exists \mathbf{X} \in M$ である。このとき, $\mathbf{X} = -\mathbf{A}$ と書く

(5_M) $\lambda \mathbf{A}, \mu \mathbf{B}$ が定義可能,

(6_M) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$ が成立,

(7_M) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$ が成立,

(8_M) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$ が成立,

(9_M) $\exists \mathbf{E}, \mathbf{O} \in M$ について, $\mathbf{EA} = \mathbf{A}$, $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$ なる行列演算が成立,

4.5. 写像

定義 68 写像

2つの集合 A, B があって, 規則 f によって, $\forall a \in A$ に対し $\exists b \in B$ が対応する場合

$$f: A \rightarrow B$$

と書いて規則 f による写像 (mapping) と呼び, ここで, A を規則 f の定義域, B を規則 f の値域と呼ぶ。また, $a \in A$ が規則 f により $b \in B$ に対応するとき,

$$b = f(a)$$

と書き, b は a の f による像 (image) あるいは値 (value) という。

定義 69 線形写像 (linear mapping)

2つのベクトル空間 V, V' があって、規則 f によって、 $f: V \rightarrow V'$ と表すとき、 W を V の部分空間、 W' を V' の部分空間とすれば、集合論的には、

$$W \subset V, W' \subset V'$$

と書き、規則 f により、写像は、

$$\text{Im } f = f(V) \subset V'; \{f(\mathbf{a}) \in V' \mid \mathbf{a} \in V\} \subset V'$$

と書く。ただし、 $\text{Im } f$ は、規則 f の像 (像空間) (image) と呼ぶ。逆に、

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\mathbf{0}) \subset V, \text{ あるいは, } \text{Ker } f = \{\mathbf{a} \in V \mid f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\}$$

それをまとめて、

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{a} \in V \mid f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\}$$

と書く。ここで、 $\text{Ker } f$ は規則 f の核 (核空間) または、カーネル (Kernel) と呼ぶ。

定理 17 線形写像 (linear mapping)

ある規則 f があって、その写像が線形であるとは、

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V)$$

$$f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a}) \quad (\mathbf{a} \in V, c \in K)$$

が成り立つことである。

定理 18 線形写像 (linear mapping)

ある $m \times n$ 型の行列 $\mathbf{A}$ があって、ある写像 f により、例えば、ベクトル $\forall \mathbf{p} \in V^n$ について、 $f(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p}$ のように書けることを線形写像あるいは 1 次変換と呼ぶ。

定義 70 写像の種類

① 単射 (injection, one-to-one mapping) 全単射 (bijective function, bijection)

集合 A, B があって、 $f: A \rightarrow B$ で、 $a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ のとき、

$$f(a_1) \in B, f(a_2) \in B, f(a_1) \neq f(a_2)$$

である場合を単射と呼ぶ。もちろん、 $a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 = a_2$ のとき、

$$f(a_1) \in B, f(a_2) \in B, f(a_1) = f(a_2)$$

と書く場合があり、論理式でいう「対偶 (contraposition)」に相当する。

集合 A, B があって、 $f: A \rightarrow B$ が定義され、全要素が単射の場合、全単射という。

特に、集合 A から集合 A への全単射のことを恒等写像と呼び、集合 A から集合 B への全単射のことを、その性質から、置換写像 (substitution) と呼ぶ場合がある。

② 逆写像 (inverse mapping)

集合 A, B があって、 $f: A \rightarrow B$ で $b = f(a) \in B$ のとき、 $f^{-1}(b) \in A$ ならば、

$f^{-1}: B \rightarrow A$ と書いて、以下の規則 f による B の原像 (preimage, 逆像) と呼ぶ。

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid b = f(a) \in B\}$$

ゆえに、逆写像を定義するときには、規則 f が単射である (前提条件)。

③中への写像 (into-mapping)

集合 A, B があって、 $A \subset B$ のとき $f: A \rightarrow B$ で表される写像において、 $\forall a \in A$ について、 $b = f(a)$ である写像で、 $f^{-1}: B \rightarrow A$ の場合、 $f^{-1}(b) = \emptyset$ である場合があるとき、 $f: A \rightarrow B$ を中への写像と言う。(単射と意味は同じ)

④上への写像 (onto-mapping, onto and one-to-one correspondence)

全射 (surjection) とも言う。 $f: A \rightarrow B$ のとき、 $f(a) = \{a \in A | \exists b = f(a) \in B\}$ であるが、逆像 $f^{-1}(b) \in A$ は存在するが一意的ではない。

定理19 行列の次元定理

行列 $\mathbf{A}$ について、その列の数を n とすると、階数と写像には以下の関係がある。

$$\text{rank } \mathbf{A} + \dim(\text{Ker } \mathbf{A}) = n$$

4.6.ベクトル IV

定理20 与えられた定義域で、ベクトル $\forall \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \in V^n$ が微分可能であり、定数 k について、以下の式が成立する。

$$(1) \quad \frac{d}{dt} k\mathbf{a}(t) = k \frac{d}{dt} \mathbf{a}(t)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} = \frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{b}(t)$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)\} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) \right) \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{b}(t) \right)$$

練習問題 4.6.1-1 定理 20 の (1) を証明せよ。

練習問題 4.6.1-2 定理 20 の (2) を証明せよ。

練習問題 4.6.1-3 式 $\mathbf{p}(t) = (a \cos \omega t) \mathbf{e}_x + (b \sin \omega t) \mathbf{e}_y + (ct) \mathbf{e}_z$ を t で微分せよ。

ここで、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は、 x, y, z 方向の単位ベクトルである。

練習問題 4.6.2-1 微分方程式 $\frac{d\mathbf{p}}{dx} = (\cos x) \mathbf{e}_x$ を解け。

練習問題 4.6.2-2 非同次の微分 $\frac{d\mathbf{p}}{dx} + x\mathbf{p} = x^2$ を解け。

定義 71 内積空間

内積空間 V_I とは、ベクトル空間 V のベクトル $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ ，定数 k について、標準内積、すなわち、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ が定義されて、

$$(1_p) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{交換法則}$$

$$(2_p) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \text{分配法則}$$

$$(3_p) \quad (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \text{定数倍}$$

$(4_p) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\|\mathbf{a}\|_2)^2 \geq 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad L^2 \text{ ノルムと零ベクトル}$
 が成立するベクトル空間を内積空間と呼ぶ。ただし、 $\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ である。
 と定義される。ここで、 (4_p) を正定値性と呼ぶ。

定理 21 内積空間の演算

ベクトル空間 V から構成された内積空間 I について、 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{0} \in V$ により、

$$(1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\mathbf{00} = 0)$$

$$(2) \quad \|k\mathbf{a}\|_2 = k\|\mathbf{a}\|_2 \quad (k \in K)$$

$$(3) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \text{ なる対称行列の場合, } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{A}\mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{a})^T \mathbf{b} = (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

 であるから、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ が成立する。

定義 72 直交補空間

内積空間 V_I の部分空間が W_I であるとき、

$$W^\perp = \{ \exists \mathbf{x} \in V_I \mid \forall \mathbf{u} \in W_I \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0; \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \}$$

と書ける $W^\perp$ を W_I の直交補空間 (orthogonal complement, perpendicular complement) と呼ぶ。ここで、集合 W_I は、集合 V_I の部分集合である。

定義 73 右・左直交補空間

直交補空間について、

$${}^R W^\perp = \{ \exists \mathbf{x} \in V_I \mid \forall \mathbf{u} \in W_I \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0 \}$$

で表す $\mathbf{u}$ は $\mathbf{x}$ に対して右直交 (right orthogonal) と定義するとき、 ${}^R W^\perp$ を右直交補空間 (right orthogonal complement) と呼ぶ。一方、

$${}^L W^\perp = \{ \exists \mathbf{x} \in V_I \mid \forall \mathbf{u} \in W_I \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \}$$

で表す $\mathbf{u}$ は $\mathbf{x}$ に対して左直交 (left-orthogonal) と定義するとき、 ${}^L W^\perp$ を左直交補空間 (left orthogonal complement) と呼ぶ。

練習問題 4.6.4-1 ベクトル空間 V^3 の上で、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W^\perp$ が、 $\mathbf{a} = (2, 1, p)$, $\mathbf{b} = (p, 1, -3)$ である場合、 $p \in \mathfrak{R}$ を求めよ。

練習問題 4.6.4-2 $W, W^\perp$ がともにベクトル空間 V の部分空間である場合、 $W, W^\perp$ の共通要素は零ベクトルのみであること。すなわち、 $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ。

演習問題 第4章

- 4-1. 整数の全体 $\mathbf{Z}$, 有理数の全体 $\mathbf{Q}$, 実数の全体 $\mathbf{R}$, 複素数の全体 $\mathbf{C}$, 自然数の全体 $\mathbf{N}$, それぞれについてアーベル群であるか議論せよ.
- 4-2. ベクトル空間 V^3 のベクトル $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 0)$ について, 1 次独立であることを示し, L^2 を求めよ.
- 4-3. ベクトル空間 V の部分空間 W_1 および W_2 について, $\dim W_1 = r_1$, $\dim W_2 = r_2$ とするとき, $W = W_1 \oplus W_2$ となる W について, $\dim W$ を $\dim W_1, \dim W_2$ で表せ.
- 4-4. ベクトル空間 V^2 の要素 $\mathbf{u} = (x, y)^T$ について,

$$W = \{\mathbf{u} \in V^2 \mid ax + by = 0; x, y, a, b \in \mathbf{R}\}$$
とする空間 W は, ベクトル空間 V^2 の部分空間となるか議論せよ.
- 4-5. $W = \{(x, y, z)^T \in V^3 \mid x + y + z = 0\}$ であるベクトル空間の次元を求めよ.
- 4-6. ベクトル空間 V^n の単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\in V^n$ について, 基底ベクトルであり, その表し方は一通りであることを示せ.
- 4-7. 複素ベクトル $\mathbf{w}$ を, $\mathbf{w} = \{a + ib\} = (a + ib)^T$ とするとき, ノルム $\|\mathbf{w}\|$ を求めよ.
- 4-8. ベクトル空間 V^2 の実ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{E}$ となる $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ があるか?
- 4-9. ベクトル空間 V^3 の単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ について, $\mathbf{E} \sim \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1$ とすると, $\text{rank } \mathbf{E} \sim = 3$ であることを示せ.
- 4-10. 2 次の歪単位行列について, $\mathbf{E}_{ij}^0(1) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2$) が成り立つことを確かめよ.
- 4-11. ベクトル空間 V^3 における単位ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$ について, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ をそれぞれ求めよ.
- 4-12. 4-11 の問題で求めた $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ はそれぞれ交代行列であることを示せ.
- 4-13. 4-11 の問題で求めた, $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ を用いて,

$$\mathbf{E}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$$
とおくとき, $\mathbf{E}_{123}$ も交代行列であることを要素レベルで証明せよ.
- 4-14. 線形写像 $f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ y - 2x \end{pmatrix}$ の $\text{Im } f$ および $\text{Ker } f$ を求め, その次元を求めよ.
- 4-15. ベクトル空間 V^3 について, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ がともに u の関数である場合, すなわち,

$$\mathbf{a} = (a_x(u), a_y(u), a_z(u))^T, \quad \mathbf{b} = (b_x(u), b_y(u), b_z(u))^T$$
と表すとき, 以下の式を証明せよ.
(1) $\frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{du}$ (2) $\frac{d}{du}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{du}$
- 4-16. ベクトル空間 V^3 について, 基底ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とするとき,
 $\mathbf{a} \in V^3$ が u の関数, すなわち, $\mathbf{a} = (u + u^2, 1 + u, u^3 - u)^T$ である場合,

$$\int \mathbf{a} du$$
を計算せよ.

5. 線形代数 IV

線形代数 IV

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

行列は、第1章でみてきたように、ベクトルや行列に関して加法（減法も含める）、定数倍、乗法（除法も含める）の演算法の定義を行いました。そして、ベクトルや行列には、「数」のような性質をもち、また、ある場合には「数」のようでない性質を持っていることがお分かりになったと思います。

ここでは、このような性質のある集合の性質として考え、微分や階数、逆行列などの諸性質を一般的な考えでまとめることは、演算の複雑さを整理することにほかなりません。以下で述べる内容には、読者が聞いたことがない言葉もあるでしょうけれど、単なる、決め事あるいは定義であって、恐れるに足らずと思って、読み流していただければ良いと思います。逆に、初めて知る方にとっては面白いかもしれませんよ。

では、*Gute Reise!*



5.1.行列 III

定理22 行列の基本演算

- 1) $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$, $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{B}$, $\ell \times k$ 型行列 $\mathbf{C}$ があって,
 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ 結合法則
- 2) $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$, $m \times n$ 型行列 $\mathbf{B}$, $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{C}$ があって,
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ 分配法則
- 3) $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$, $m \times n$ 型行列 $\mathbf{B}$, $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{C}$ があって,
 $\mathbf{C}^T(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T$ 転置法則
- 4) $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$, $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{B}$, スカラー一定数 $\alpha (\in \mathfrak{R})$ があって,
 $(\alpha \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$ 定数法則
- 5) n 次の正則行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ があって, その積の逆行列は,
 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 逆行列法則



練習問題 5.1.1-1 定理 22 の 1) ～ 3) を 3 次の要素レベルで証明をせよ。

練習問題 5.1.1-2 次の行列を用いて, $\mathbf{AP}$ および $\mathbf{P}^T\mathbf{A}^T$ を計算して, 比較せよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix}$$

練習問題 5.1.1-3 $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$, $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{B}$, スカラー一定数 $\alpha (\in \mathfrak{R})$ があって,
 $(\alpha \mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$ を要素レベルで証明せよ

練習問題 5.1.1-4 定理 22 の 5) を 3 次の要素レベルで証明をせよ。

定義 74 行列 $\mathbf{A}$ を変数で偏微分

$m \times n$ の行列 $\mathbf{A}$ があるとき, 変数 x で偏微分するとは,

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial x} \end{pmatrix}$$

とすることである。

練習問題 5.1.2-1 次の式を証明せよ。

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_{ij}(x) = \mathbf{E}_{ij}^0(1)$$

練習問題 5.1.2-2 次の式を証明せよ.

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_i(x) = \mathbf{E}$$

定義 75 スカラー ϕ を行列 $\mathbf{A}$ で偏微分

$m \times n$ の行列 $\mathbf{A}$ があるとき, スカラー ϕ を行列 $\mathbf{A}$ で偏微分するとは,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial a_{mn}} \end{pmatrix}$$

とすることである. この場合, スカラー ϕ はスカラー関数でも同様である.

定理 23 n 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ があって, その余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ について, $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ である.

練習問題 5.1.4-1 n 次の行列式 $|\mathbf{A}|$ を a_{ij} と $\tilde{a}_{ij}$ で表せ. ただし, i 行の a_{ij} 以外はすべて 0 とする. または, j 列の a_{ij} 以外はすべて 0 とする.

練習問題 5.1.4-2 n 次の行列 $\mathbf{A}$ について, 余因子に関する $(\tilde{\mathbf{A}}^T) = (\tilde{\mathbf{A}})^T$ が成り立つことを示せ.

練習問題 5.1.4-3 以下の 2 次の正則行列 $\mathbf{A}$ について, $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{E}$ となる $\mathbf{B}$ の要素を求め, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{B}|\mathbf{A}|$ であることを要素を用いて示せ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

5.2.階数

定義 76 階数 (ランク rank)

- (1_{rank}) 行列 $\mathbf{A}$ を三角行列 (階段行列) に変形したときの零ベクトルでない行 (または列) ベクトルの数
- (2_{rank}) 行列 $\mathbf{A}$ の行 (または列) ベクトルの 1 次独立なベクトルの最大個数
- (3_{rank}) 行列 $\mathbf{A}$ の行 (または列) ベクトルの張る線形空間の次元 (dim)
- (4_{rank}) 値が 0 でない行列 $\mathbf{A}$ の一部の要素で作成した行列式 (小行列式) の最大次数
- (5_{rank}) 行列 $\mathbf{A}$ の特異値の数

定理 24 ランクの定理

- (1_{rankC}) 行列 $\mathbf{A}$ の階数 r と行列 $\mathbf{A}$ の転置行列 $\mathbf{A}^T$ の階数は同じ, すなわち,

$$\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$$
- (2_{rankC}) 行列 $\mathbf{A}$ に行または列を加えた行列 $\mathbf{B}$ について

$$\text{rank}(\mathbf{A}) \leq \text{rank}(\mathbf{B})$$
- (3_{rankC}) 行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{B}$ の階数と, それらの積の階数について

$$\text{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min [\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B})]$$
- (4_{rankC}) 行列 $\mathbf{A}$ が $m \times n$ 型, 行列 $\mathbf{B}$ が m 次および $\mathbf{C}$ が n 次の正則行列のときは,

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{BA}) = \text{rank}(\mathbf{AC})$$
- (5_{rankC}) n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ について, 以下の関係は同値である.
1. 正方行列 $\mathbf{A}$ は正則行列であること.
 2. $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ であること.
 3. 正方行列 $\mathbf{A}$ を変形して階段行列にすると単位行列 $\mathbf{E}_n$ になること.
 4. 連立方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ は, ただ一組の解をもつこと ($\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ 未知数, $\mathbf{b}$ は定数).
 5. 正方行列 $\mathbf{A}$ を構成する全行ベクトルまたは全列ベクトルは 1 次独立であること.

定理 25 ランク限界

n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ について, $r+1$ 次の小行列式が全て 0 であるとき, $r+1$ 次以上 n 次以下の小行列式は全て 0 である.

定理 26 行・列の入れ替えによるランク

行列 $\mathbf{A}$ の列 (または, 行) の順序を入れ替えても, ランクは変わらない.

定理 27 転置によるランク

n 次の行列 $\mathbf{A}$ のランクは, 行列 $\mathbf{A}$ を転置しても変わらない. すなわち,

$$\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T = r \leq n$$

定理28 行・列の非零定数によるランク

行列 $\mathbf{A}$ の行（または列）の各要素に 0 でない定数を乗じても、行列 $\mathbf{A}$ のランクは変わらない。

定理29 行・列の付加によるランク

行列 $\mathbf{A}$ について、1 つの列（または、行）の各要素に 0 でない定数を掛けて、他の列（または、行）に加えても行列 $\mathbf{A}$ のランクは変わらない。

定理30 $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$ があって、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \ (< \min(m, n))$ である場合、その 1 次独立な r 個の行（または列）ベクトルによって、他の行（または列）ベクトルを 1 次結合として表すことができる。

定理31 $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$ があって、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \ (< \min(m, n))$ である場合、行列 $\mathbf{A}$ から作る n 個の列ベクトルの中には、 r 個の 1 次独立なベクトルが存在する。また、行ベクトルも同様である。

定理32 $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$ があって、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \ (< \min(m, n))$ である場合、行列 $\mathbf{A}$ を作る列（または、行）の中の s 個 ($s \leq r$) の 1 次独立な列（または、行）ベクトルを用いて、 $m \times s$ (または、 $s \times n$) 型の行列 $\mathbf{B}$ を作れば、 $\text{rank}(\mathbf{B}) = s$ である。

定理33 $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$ があって、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \ (< \min(m, n))$ である場合、 r は行列 $\mathbf{A}$ の行（または、列）が作る 1 次独立な行（または、列）ベクトルの数の最大値である。

定理34 行列 $\mathbf{A}$ を作る列（または、行）ベクトルの中に r 個の 1 次独立なベクトルがあって、他の列（または、行）は、これらの 1 次結合で表されるとき、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ である。

定理35 行列のランクは正則な行列をかけても変わらない

5.3.逆行列とクラメールの式

練習問題 5.3.2-1 逆行列に関する練習問題を自分で作って解答を書きなさい。

練習問題 5.3.2-2 次の 2 元 1 次方程式

$$x + 2y = 4$$

$$-3x + 4y = -2$$

を逆行列とクラメールの式を用いてそれぞれ解答を書き、両者を比較せよ。

演習問題 第 5 章

5-1. $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$ および $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{B}$ について、それらの積 $\mathbf{AB}$ を行列 $\mathbf{C}$ とするとき、行列 $\mathbf{C}$ の型と成分 c_{ij} の表式を示せ。

5-2. n 次の正方行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ について、 n 次の正方行列 $\Delta = \{\delta_{ij}\}$ との積 $\mathbf{A}\Delta$ を

求めよ。また、 $\Delta\mathbf{A}$ を求めよ。ただし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

5-3. 以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}^T, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

について、 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ を要素レベルで証明せよ。

5-4. 以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

について、 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ を要素レベルで証明せよ。

5-5. 以下の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

について、 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ を要素レベルで証明せよ。

5-6. スカラー $\varphi = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}$ を次の行列で偏微分せよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

5-7. 行列 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ を、それぞれ、 m 次および n 次の正則行列とし、 $\mathbf{R}$ を $m \times n$ の行列とすると、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad \text{の逆行列 } \mathbf{A}^{-1} \text{ を求めよ。}$$

5-8. 2×2 型行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ について、 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}}$ を計算し、その結果を、2 次の歪単位行

列 $\mathbf{E}_{ij}^0(k)$ で表せ。

5-9. 掃き出し法を利用して、次の行列 $\mathbf{A}$ のランク（階数）を求めよ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5-10. 次の方程式をクラメルの式を用いて解け。

$$(1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

6. 線形代数 V

線形代数 V

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

行列式は、第1章で見てきたように、行列式に関して加法（減法も含める）、定数倍、乗法の演算法の定義を行いました。そして、行列式には、「数」のような性質をもち、また、ある場合には「変数」や「関数」となる性質も持っていることがお分かりになったと思います。

ここで、その諸性質を、より高度で一般的な考えでまとめることは、演算の複雑さを整理することにほかなりません。以下で述べるのは、これまで述べてきたことの拡張ですから、読者にとって、聞いたことがない言葉もあるでしょうけれど、単なる、決め事あるいは定義であって、恐れるに足らずと思って、読み流していただければ良いと思います。逆に、初めて知る方にとっては面白いかもしれませんよ。章ごと同じような言葉ばかりですが、強調しているのだ、と思ってください。

では、 *¡Que tengas un buen viaje!*



6.1.行列式 II

練習問題 6.1.1-1 次の行列式を解け.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

練習問題 6.1.1-2 次の方程式をクラメルの公式を用いて解け.

定理36 複数列行列式の操作

 m 次の正方行列 $\mathbf{A}$, n 次の正方行列 $\mathbf{B}$, $m \times n$ 型の行列 $\mathbf{C}$ について,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix}$$

定理37 複数列の行列式の演算

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{W} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{AX} + \mathbf{BZ} & \mathbf{AY} + \mathbf{BW} \\ \mathbf{CX} + \mathbf{DZ} & \mathbf{CY} + \mathbf{DW} \end{vmatrix}$$

ただし, 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$ の型は上記演算が成り立つ場合に限る.定理38 n 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ があって, その余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ について, $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ である

練習問題 6.1.3-1 次の 3 次の行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

について, 要素 a_{13} および a_{32} に関して, 余因子をそれぞれ答えよ

練習問題 6.1.3-2 次の 3 次の正方行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

について, $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$ が成立することを要素を用いて示せ.

練習問題 6.1.3-3 次の (1) 2 次, および, (2) 3 次の, それぞれの正方行列

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

について, $|\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ (n は次数) であることを要素を用いて示せ.

練習問題 6.1.3-4 次の 3 次の正方行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

について, $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ であることを要素を用いて示せ.

演習問題 第 6 章

6-1. 次の n 次の対角行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

について、逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求め、 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ を要素表現で示せ。

6-2. 次の n 次の対角行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

について、 $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ であることを余因子展開の概念を用いた数学的帰納法で証明せよ。

6-3. $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$, $m \times \ell$ 型行列 $\mathbf{B}$, $\ell \times n$ 型行列 $\mathbf{P}$, ℓ 次の正方行列 $\mathbf{Q}$ があって、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{P} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

のように行の移動を行う場合、行を入れ替える総数を答えよ。

6-4. 定理 38 で、行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}$ の演算を 2×2 の正方行列で確かめよ。6-5. n 次の行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{O}, \mathbf{E}$ があって、 $\mathbf{O}$ は零行列、 $\mathbf{E}$ は単位行列とする。ここで、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

となる n 次の行列 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ を $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{O}, \mathbf{E}$ で表せ。

6-6. 6.5 の結果を用いて、 n 次の正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ について、

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \quad (\text{a})$$

が成り立つとき、

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{AD} - \mathbf{CB}| \quad (\text{b})$$

であれば、 $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ の積に関して可換であることを示せ。

7. 線形代数 VI 補足

線形代数 VI 補足

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

ベクトルについて、これまで、各章で見て来たように、加法（減法も含める）、定数倍、乗法の演算法の定義を行い、定理を示し、ベクトルが「数」のような性質を持つことを紹介しました。そして、行列式についても、演算を定義することで、ベクトルと同様に、「数」のような性質を持つことを示しました。また、ベクトルや行列が、それ自身、ある場合には、「変数」や「関数」となる性質も持っていることもお分かりになったと思います。

ここでは、補足として、その諸性質の具体的な応用を紹介することで、さらに、線形代数の理解を深めて頂きたいと思います。それは、定義や定理、そして、演算方法を整理することにほかなりません。以下で述べる中には、読者にとって、聞いたことがない新たな言葉も出てくるでしょうけれど、単なる、決め事あるいは定義であって、恐れるに足らずと思って、読み続けて頂ければ良いと思います。逆に、初めて知る方にとっては面白いかもしれませんよ。

では、Приятного путешествия!

7.1.ベクトル IV 微分

定義 77 ベクトルを偏微分

n 次元ベクトル $\forall \mathbf{a} \in V^3$ を偏微分するとは, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ とするとき,

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial a_n}{\partial x}$$

と表す. すなわち, 微分の結果は, ベクトルになる. また, ベクトル $\mathbf{a}$ の要素は, 関数または定数で, 要素が x の関数でなければ, その要素の偏微分は 0 である.

ここで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は, ベクトル空間 $V^n (\dim V^n = n)$ の基底ベクトルである.

練習問題 7.1.1-1 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ について, $\mathbf{a} = (x, y, z), \mathbf{b} = (z, y, x)$ のとき,

$$\frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial x}, \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial y}, \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial z}$$

をそれぞれ計算せよ.

練習問題 7.1.1-2 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ について, $\mathbf{a} = (x, y, z), \mathbf{b} = (z, y, x)$ のとき

$$\frac{\partial(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\partial x}, \frac{\partial(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\partial y}, \frac{\partial(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\partial z}$$

をそれぞれ計算せよ.

定義 78 ベクトルで偏微分

n 次元ベクトル $\mathbf{a}$ で偏微分するとは, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ とするとき,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial a_n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial a_i}$$

として, スカラー ϕ , 関数 $f(x, y, z)$, ベクトル $\mathbf{v}$, 行列 $\mathbf{A}$ などに対して左から作用させることを「ベクトルで偏微分する」と言う微分条件としては, 定式化が可能なことである.

ここで, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は, 互いに直交し, 各々の長さが 1 である単位ベクトルである.

練習問題 7.1.2-1 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ について, $\mathbf{a} = (x, y, z), \mathbf{b} = (z, y, x)$ であるとする.

このとき, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ とするとき, $\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) / \partial \mathbf{x}$ を計算せよ.

練習問題 7.1.2-2 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ について, $\mathbf{a} = (x, y, z), \mathbf{b} = (z, y, x)$ であるとする.

このとき, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ とするとき, $\partial(|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2) / \partial \mathbf{x}$ を計算せよ.

7.2.直線内挿

定義 79 回帰係数

回帰係数 r は, x, y のそれぞれの平均を $\bar{x}, \bar{y}$ として,

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$

とする. ただし, σ_x, σ_y は x, y それぞれの標準偏差で,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2}$$

練習問題 7.2.1-1 以下に示すベクトル $\mathbf{x}$, 行列 $\mathbf{A}$, ベクトル $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2)^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = (y_1 \quad y_2)^T$$

について, 以下の式を証明せよ.

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}$$

練習問題 7.2.1-2 次の x, y について,

$\mathbf{x}$	1.0	1.1	1.4	1.6	1.9	2.1	2.2	2.5	2.8	3.0
$\mathbf{y}$	4.0	4.2	4.1	5.0	4.8	5.8	5.5	5.6	6.2	6.0

以下の問いに答えよ.

- 1) 平均値, $\bar{y}$ をそれぞれ求めよ.
- 2) 分散 σ_x, σ_y をそれぞれ求めよ.
- 3) 相関係数 r を求めよ.
- 4) 回帰直線の式の傾きを求めよ.
- 5) 回帰直線とデータに関するグラフを書け.

定義 80 1 次内挿 (線形内挿, 線形補間)

異なる 2 点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ を通る直線 P_1P_2 上の任意の点 $P(x, y)$ は, x を与えることで,

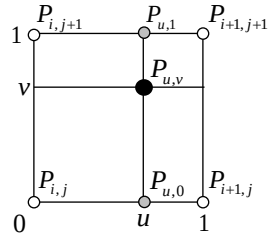
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

で求めることができる. この方法を 1 次内挿と呼ぶ.

定義 81 双 1 次内挿

双 1 次内挿とは、1 次内挿を 2 度用いる内挿法である。長さ
が 1 の格子があって各隅の値が、 $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i+1,j+1}$, $P_{i,j+1}$ であ
るとき、 (u, v) ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$) における値 $P_{u,v}$ を求める
式は、次式で与えられる：

$$P_{u,v} = (1-v) \begin{pmatrix} P_{i,j} & P_{i+1,j} \\ P_{i,j+1} & P_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-u \\ u \end{pmatrix}$$



7.3.平面内挿

定義 82 回帰係数行列式

回帰係数を要素に持つ

$$|\mathbf{R}| = \begin{vmatrix} r_{zz} & r_{zx} & r_{zy} \\ r_{xz} & r_{xx} & r_{xy} \\ r_{yz} & r_{yx} & r_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r_{zx} & r_{zy} \\ r_{zx} & 1 & r_{xy} \\ r_{yz} & r_{xy} & 1 \end{vmatrix}$$

とする対称行列 $\mathbf{R}$ の行列式を回帰係数行列式 (regression coefficient determinant) と呼ぶ。

練習問題 7.3-1 3 次元空間に n 個の点 $A_i(X_i, Y_i, Z_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) があって、

$x_i = X_i - \bar{X}$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$, $z_i = Z_i - \bar{Z}$ ($i=1, 2, \dots, n$) とするとき、

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n z_i = 0$$

であることを示せ。ただし、 $\bar{X}$ は X_i の、 $\bar{Y}$ は Y_i の、 $\bar{Z}$ は Z_i の、各々の平均値である。

練習問題 7.3-2 上記、練習問題 7.3-1 の x_i, y_i, z_i を要素とするベクトル：

$$\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

について、 $\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ であることを示せ。

7.4.曲線内挿

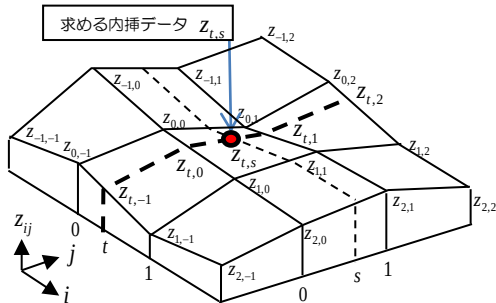
練習問題 7.4-1 図の $z_{t,s}$ 位置の値を双
三次内挿の方法を用いて求めよ。た
だし、 $t=0.4$, $s=0.6$,

$$z_{-1,-1} = 4, z_{0,-1} = 5, z_{1,-1} = 2, z_{2,-1} = 3$$

$$z_{-1,0} = 8, z_{0,0} = 6, z_{1,0} = 5, z_{2,0} = 4$$

$$z_{-1,1} = 6, z_{0,1} = 3, z_{1,1} = 7, z_{2,1} = 8$$

$$z_{-1,2} = 7, z_{0,2} = 6, z_{1,2} = 3, z_{2,2} = 4$$



練習問題 7.4-2 曲線内挿の問題を新に作成し答えの確かめをせよ。

7.5.ベクトル V 幾何問題

練習問題 7.5-1 未知数 x, y, z を持つ以下の行列式はどのような空間的な面を表すかを記せ。ただし, $a, b, c \in \mathfrak{R}$ である。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

練習問題 7.5-2 未知数 x, y, z を持つ以下の行列式はどのような空間的な面を表すかを記せ。ただし, $p_{ij} (i=1,2,3; j=x,y,z) \in \mathfrak{R}$ である。

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p_{1x} & p_{1y} & p_{1z} & 1 \\ p_{2x} & p_{2y} & p_{2z} & 1 \\ p_{3x} & p_{3y} & p_{3z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7.6.固有値 II

練習問題 7.6-1 行列 $\mathbf{A}$ が正則行列 $\mathbf{X}$ により対角化できて, 行列 $\mathbf{\Lambda}$ になったとすると, 行列 $\mathbf{A}$ と行列 $\mathbf{\Lambda}$ の固有値が等しいことを示せ。

7.7.内積空間 II

練習問題 7.7-1 実数をベクトル空間と考えたとき, $\forall z \in \mathfrak{R}$ について, $\forall x, y \in \mathfrak{R}$ は内積空間を作ることができることを示せ。

演習問題 第7章

7-1. $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ と書くとき, Δ をラプラシアンと呼びます. ラプラシアンを計算せよ.

7-2. 3次元ベクトル $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$

をベクトル $\mathbf{x}$ で偏微分せよ.

7-3. n 次元ベクトル $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$

をベクトル $\mathbf{x}$ で偏微分せよ.

7-4. スカラー ϕ, φ に対して,

$$(1) \nabla \cdot (\phi \nabla \varphi) = \nabla \phi \nabla \varphi + \phi \nabla^2 \varphi$$

$$(2) \nabla^2 (\phi \varphi) = \phi \nabla^2 \varphi + 2(\nabla \phi) \cdot (\nabla \varphi) + \varphi \nabla^2 \phi$$

なる式をそれぞれ証明せよ.

7-5. $\mathbf{a} \in V^3$ なるベクトルについて,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

7-6. 式 7.1.3-11 において, 媒質の中には電流の湧き出しはなく, すなわち, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{0}$ を仮定し, さらに, 媒質内には電荷もない場合は $\rho = 0$ と仮定できる. このような環境の下で, 式 7.1.3-5 から式 7.1.3-8 および式 7.1.3-9 などから式 7.1.3-12 を導出せよ.

7-7. 式 1.4.1-6, すなわち,

$$|\mathbf{A}| = \sum \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

の, $p_1, p_2, \dots, p_n$ から任意に選んだ2つを交換した場合の $|\mathbf{A}|$ の符号を議論せよ.

7-8. 行列 $\mathbf{A}$ の固有値を λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) とするとき, 行列 $\mathbf{A}^k$ ($1 \leq k \in \mathbb{N}$) の固有値は, 元の固有値の k 乗となる, すなわち, λ_i^k ($i=1, 2, \dots, n$) であることを示せ.

7-9. 任意の n 次の正方行列 $\mathbf{A}$ について, その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とするとき,

$$(1) \operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$(2) |\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

を証明せよ.

7-10. 前問, すなわち, 問題 7-9 の 1) および 2) について, 例題 3.2.5-2 の行列 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

を用いて確かめよ.

7-11. n 次の正則行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の積の逆数に関して, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ の余因子行列 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ を用いて $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ が成り立つこと示し, 次式を証明せよ.

$$(\mathbf{ABC} \cdots \mathbf{XYZ})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{X}^{-1} \cdots \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

ただし, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ は全て n 次の正則行列とする.

7-12. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^3$ について, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ とするとき, 式 7.1.2-6 を参考に, 次式を計算せよ. $\frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}}$

練習問題 解答

第1章

練習問題 1.1.1-1 (1) ベクトル, (2) スカラー, (3) 行列, (4) スカラー, (5) スカラー

練習問題 1.1.2-1 略

練習問題 1.1.2-2 $a \neq 0$

練習問題 1.1.2-3 ベクトル $\mathbf{a}$ が 1 次独立な場合は, 定義によれば $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ と書くとき $\lambda = 0$ のときに限る。したがって, ベクトル $\mathbf{a}$ が 1 次独立な場合は $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ である。逆に, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ であるとき, $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ を成立させるためには $\lambda = 0$ でなければならない。結論として, ベクトル $\mathbf{a}$ が 1 次独立であるとは, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ であることで, ベクトル $\mathbf{a}$ が 1 次従属であるとは, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ であることである。

練習問題 1.1.3-1 $(2 \ -1 \ 3)^T + 2(1 \ 3 \ 2)^T - (c_1 \ c_2 \ c_3)^T = (0 \ 0 \ 0)^T$
 $c_1 = 2 + 2 = 4, c_2 = -1 + 6 = 5, c_3 = 3 + 4 = 7$
 $\mathbf{c} = (4 \ 5 \ 7)^T$

練習問題 1.1.3-2 略 (Hint: $k\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c} = \mathbf{0}$ がとき $k = m = n = 0$ 以外成り立たない必要十分条件を示す)

練習問題 1.1.3-3 略 (Hint: 定義にしたがって考える)

練習問題 1.1.4-1 ベクトル $\mathbf{a}$ とベクトル $\mathbf{b}$ は平行

練習問題 1.1.4-2 ベクトル $\mathbf{x}$ について, そのノルムが -1 以上, 1 以下である。2 次元ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = (x, y)$ と書くならば, $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ は $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ だから, その幾何的意味は, 原点を中心とする等辺のひし形 (ダイヤモンド型) の表面または内部を示している。ちなみに, 3 次元ベクトルに対するノルムは $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ であり 幾何的な意味は, $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ であるから, 正三角形 8 枚で構成する, 原点を中心とする正八面体の表面または内部, ということになる。

(練習問題 1.2.3-4 参照)

練習問題 1.1.4-3 素数全体の集合 $\mathbf{P}$ の, $\mathbf{a}$ を代表として, いかなる要素についても

練習問題 1.1.4-4 3 (「-3」とか「 ± 3 」ではないことに注意)

練習問題 1.1.4-5 三角形 ABC と三角形 PQR とは相似である

練習問題 1.1.4-6 集合 Φ は集合 Θ の部分集合である。あるいは, $\forall a \in \Phi$ について $a \in \Theta$ である。

練習問題 1.1.4-7 集合 Φ は集合 Θ の部分集合でない。あるいは, $\forall a \in \Phi$ について $a \notin \Theta$ である。

練習問題 1.1.5-1 $n^2, n(n+1)$

練習問題 1.1.5-2 $(1/6)n(n+1)(n+2)$

練習問題 1.1.5-3 略 (Hint: a_{ij} を $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ としてやってみる)

練習問題 1.1.5-4 略

練習問題 1.1.5-5 $\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^2 = \{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n\}^2 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdots a_n^2 = \prod_{i=1}^n a_i^2$

練習問題 1.1.5-6 $\boxed{1} \parallel, \boxed{2} \perp, \boxed{3} \ll, \boxed{4} \approx, \boxed{5} \gg$

練習問題 1.2.1-1 $x = y$ ($x = -y$ や $x = \pm y$ は間違いです。何故でしょう?)

練習問題 1.2.1-2 略 (Hint: A_i の位置ベクトルを $\mathbf{a}_i$ とすると) $\vec{a}_i (A_i \rightarrow A_{i+1}) = \mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i$

練習問題 1.2.3-1 (1) $\mathbf{c} = (-1, 3, 1)$ (2) $\mathbf{c} = (-1, 1, -3)$ (3) $\mathbf{c} = (1, -1.5, 2)$ (4) $\mathbf{c} = (-2.4, 5.1, -1.8)$

練習問題 1.2.3-2 (1) $\|\mathbf{p}\| = 3.32$ (2) $\|\mathbf{p}\| = 3.32$ (3) $\|\mathbf{p}\| = 2.69$ (4) $\|\mathbf{p}\| = 5.92$

練習問題 1.2.3-3 3 (0 でない要素が 3)

練習問題 1.2.3-4 $L^1 = 1$ の場合は, $\|\mathbf{p}\|_1 = \sum |p_i| = |p_1| + |p_2| = 1$ です.

この場合は, $p_2 = p_1 \pm 1$, $p_2 = -p_1 \pm 1$ ($-1 \leq p_2 \leq 1$) です.

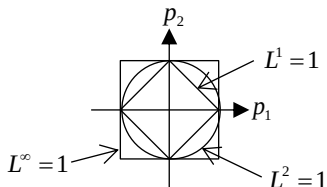
$L^2 = 1$ の場合は, $\|\mathbf{p}\|_2 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 1$ です

この場合は, $p_1^2 + p_2^2 = 1$ です.

$L^\infty = 1$ の場合は, $\|\mathbf{p}\|_\infty = \max\{|p_1|, |p_2|\} = 1$ です.

この場合は, $|p_1| \geq |p_2| \Rightarrow p_1 = \pm 1$; $|p_1| \leq |p_2| \Rightarrow p_2 = \pm 1$ です.

したがって, 図に書くと,



練習問題 1.2.4-1 (1) 略 (2) 略 (Hint: $\mathbf{e}_x = (1 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{e}_y = (0 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{e}_z = (0 \ 0 \ 1)^T$)

練習問題 1.2.4-2 3 次元の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x = (1 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{e}_y = (0 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{e}_z = (0 \ 0 \ 1)^T$ とすれば,

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{および} \quad \mathbf{b} = (2a \ -1 \ 4b)^T$$

練習問題 1.2.4-3 ① i , ② j

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} a_j \mathbf{e}_i$$

練習問題 1.2.5-1 $\vec{AB} - \vec{AC}$ ベクトルの向きに注意

練習問題 1.2.5-2 $(1/2)(\vec{AC} - \vec{AB})$

練習問題 1.2.6-1 略 (Hint: 幾何的な定義式を用いる. ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を xy 平面にあるとし, ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の外積の大きさは平行六面体の底面積, ベクトル $\mathbf{c}$ の z 軸への射影は平行六面体の高さ)

練習問題 1.2.6-2 2 (Hint: xyz 座標系で, $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ および $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$ のなす角は 90° .

$\mathbf{c} = (3, 2, 1)$ の z 軸方向の射影は 1, あるいは, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ なる三重積)

練習問題 1.2.6-3 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = 3$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-1, 5, -3)$

練習問題 1.2.6-4 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 6 - 2 = -6$

練習問題 1.2.6-5 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y - 8\mathbf{e}_z$

練習問題 1.2.7-1 0 (したがって, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$)

練習問題 1.2.7-2 3

練習問題 1.2.7-3 $\mathbf{p} = (2, 1)$

練習問題 1.2.7-4 $\mathbf{p} = (a, b)$

練習問題 1.2.8-1 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3 \ -3 \ 1)^T$

練習問題 1.2.8-2 略 (Hint: 定義通り, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ はなにを示すか? 平行六面体とは?)

練習問題 1.2.9-1 略(1), (2) (Hint: 定義通り)

練習問題 1.2.9-2 略(1), (2) (Hint: 定義通り)

練習問題 1.2.9-3 略 (Hint: 公式, 向きに注意; $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ を示す)

練習問題 1.2.9-4 略 (Hint: 公式, 向きに注意; $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を示す)

練習問題 1.2.9-5 略 (Hint: 公式, 向きに注意)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$$

練習問題 1.2.10-1 略 (Hint: $\|\mathbf{a}\| = 5$ なので, $\ell = 3/5 = 0.6$, $m = 0/5 = 0$, $n = 4/5 = 0.8$)

練習問題 1.2.10-2 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (4, 2, 4)$

練習問題 1.2.12-1 (Hint: 内分: 式 1.2.11-2; 外分: 式 1.2.11-3)

$$\mathbf{c} = (0.4 \ 1 \ 1.8)^T, \quad \mathbf{c} = (-2 \ 1 \ 9)^T$$

練習問題 1.2.12-2 $\mathbf{g} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$ (Hint: 重心は各頂点から対辺の中心と結んだ線の交点)

練習問題 1.2.12-3 $\frac{x - p_x}{a_x} = \frac{y - p_y}{a_y} = \frac{z - p_z}{a_z}$

練習問題 1.2.12-4 略 (Hint: $\vec{PQ} = \vec{SR}$ を示す. 例えば, 点 A に対する位置ベクトルを $\mathbf{a}$ とおく. このとき, $\mathbf{p} = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{q} = (1/2)(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ etc. $\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{SR} = (1/2)(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ 幾何を用いる簡単な証明は, 中点連結定理を使うこと)

練習問題 1.2.12-5 略 (Hint: ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る図形は?)

練習問題 1.3.2-1 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 & 6 \\ 2/5 & 9/5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

練習問題 1.3.2-2 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$

練習問題 1.3.2-3 略 (Hint: $\omega^2 + \omega + 1 = 0$)

練習問題 1.3.2-4 $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 + 6/5 & 3/5 - 3/5 \\ -2/5 + 2/5 & 6/5 - 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$

練習問題 1.3.2-5 略 (Hint: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ をそれぞれ $k \times \ell, \ell \times m, m \times n$ とすれば,

練習問題 1.3.3-1 略 (Hint: 要素で確認)

練習問題 1.3.3-2 略 (Hint: 要素で確認; $\mathbf{RR} = \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^k \mathbf{R} = \mathbf{R}^{k+1}$ など 数学的帰納法)

練習問題 1.3.3-3 略 (Hint: 要素で確認)

練習問題 1.3.3-4 略 (Hint: 要素で確認)

練習問題 1.3.3-5 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -i & -3i+1 \\ 3i-1 & 0 \end{pmatrix}$ (Hint: 要素で確認) $|\mathbf{B} + \overline{\mathbf{A}}^T| = 4, \quad |(\mathbf{B} - \overline{\mathbf{A}}^T)/6| = -1$

練習問題 1.3.4-1 略 (Hint: $\mathbf{AE}_{12}(k) = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{11} + a_{22} \\ a_{21} & ka_{21} + a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12}(k)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$)

練習問題 1.3.4-2 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 0 \times 2 \\ 2 \times 1 & 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
 $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 2 \times 0 \\ 1 \times 2 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ 可換である.

練習問題 1.3.4-3

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ で可換ではない.

練習問題 1.3.5-1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{tr } \mathbf{A} = 1 + 4 = \text{tr } \mathbf{A}^T = 1 + 4 = 5 \quad \therefore \text{tr } \mathbf{A} = \text{tr } \mathbf{A}^T$$

練習問題 1.3.5-2

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr } \mathbf{AB} = 19 + 50 = \text{tr } \mathbf{BA} = 23 + 46 = 69$$

練習問題 1.3.5-3 略 (Hint: 要素で確認)

練習問題 1.3.6-1 略 (Hint: 定義で確認)

練習問題 1.3.6-2 適当なベクトル $\boldsymbol{\rho}$ ($\|\boldsymbol{\rho}\| = 1$) を選んで, $\mathbf{q} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\rho}$ とすれば, $\mathbf{q}$ はベクトルであり, ベクトルのノルムが計算できる. ここで, $\|\mathbf{q}\|$ を最大にするようなベクトル $\boldsymbol{\rho}$ を $\boldsymbol{\rho}_{\text{MAX}}$ とすれば, 行列ノルムの定義から, $\|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\rho}\| \leq \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\rho}_{\text{MAX}}\|$ であり, 果たして,

$$\|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\boldsymbol{\rho}_{\text{MAX}}\| = \|\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_{\text{MAX}}\| + \|\mathbf{B}\boldsymbol{\rho}_{\text{MAX}}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \text{となる.} \quad \therefore \|(\mathbf{A} + \mathbf{B})\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

練習問題 1.4.1-1 (1) 2 (2) 0

練習問題 1.4.1-2 (1) -1 (2) 0

練習問題 1.4.1-3 (1) 偶順列: 123, 312, 321; 奇順列: 132, 213, 231

$$(2) 5 \quad (4231 \Rightarrow 2431 \Rightarrow 2341 \Rightarrow 2314 \Rightarrow 2134 \Rightarrow 1234)$$

$$\text{練習問題 1.4.2-1 (1)} \quad \tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4 - 2) = -6$$

$$(2) \quad \tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} \omega & -1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix} = 1 \times (\omega^3 + 1) = 2$$

練習問題 1.4.2-2 2

練習問題 1.4.2-3 略 (式 1.4.1-3 と (1) 及び (2) はともに, $|\mathbf{A}|$ と同じ)

練習問題 1.4.3-1 略 (Hint: 行列式の値を p とすると, 行ベクトル, 列ベクトルを 1 回, 2 回, 3 回 と入れ替えた場合は, 行でも列でも同様に, $-p, p, -p$ となる. いずれにしても, 負号, 正号, 負号と変化する.)

練習問題 1.4.3-2 略 (Hint: $|\mathbf{A}|$ の余因子展開は $|\mathbf{A}| = \sum a_{ij} \tilde{a}_{ij}$ である.)

練習問題 1.4.3-3 24, $n!$ (Hint: 4 次の行列式を実際に余因子展開するのが簡単 (笑))

練習問題 1.4.4-1 略 (Hint: 要素で確認)

練習問題 1.4.4-2 略 (Hint: 要素で確認)

$$\text{練習問題 1.4.5-1} \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1+1 & 2+2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{練習問題 1.4.5-2} \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 9 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1+1+1 & -1 & 1 \\ 2+2+2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

練習問題 1.4.6-1 n 次の行列式 $|\mathbf{A}|$ で、例えば、 (6_D) の性質から、同じ要素である 1 つの行に -1 を掛け、同じ要素を持つ行に加える。このとき、1 行全て要素が 0 である $|\mathbf{A}|$ と同値な行列式ができる。その全て 0 の行で行余因子列展開することを考えれば、 $|\mathbf{A}| = 0$ であることは明らかである。列に関する場合も同様である。したがって、題意が証明された。

練習問題 1.4.6-2 n 次の行列式 $|\mathbf{A}|$ で、例えば、 i 行の要素すべてを k 倍した行列式を $|\mathbf{A}'|$ とすると、 $|\mathbf{A}'|$ を i 行余因子列展開すると、 $|\mathbf{A}|$ の i 行余因子展開した式全体に k をかけた式となる。すなわち、 $|\mathbf{A}|$ に k をかけた式になる。また、 $|\mathbf{A}|$ の j 列を k 倍して j 列余因子行展開した場合についても同様である。したがって、題意が証明された。

練習問題 1.4.6-3 略 (Hint: 余因子展開)

練習問題 1.4.6-4 略 (Hint: 余因子展開)

練習問題 1.4.6-5 略 (Hint: 例題 1.4.4-3 を参考に)

練習問題 1.5.1-1 略 (Hint: 平行六面体の体積は底面積 $\times$ 高さ)

練習問題 1.5.1-2 2

$$\text{練習問題 1.5.1-3} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$$

$$\text{練習問題 1.5.1-4} \quad (\text{Hint: } \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad \vec{P_0P_1} \text{ は } \vec{P_0P_2} \times \vec{P_0P_3} \text{ に垂直})$$

平面の方程式は $ax + by + cz + d = 0$)

練習問題 1.5.1-5 $\mathbf{P}$ は正則行列だから $|\mathbf{P}| = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \neq 0$.

余因子行列を求めると

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix} \quad \text{であるから、逆行列は} \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}$$

である。そこで、 $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{E}$ を示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix}}{|\mathbf{P}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} & -p_{11}p_{12} + p_{12}p_{11} \\ p_{21}p_{22} - p_{22}p_{21} & -p_{21}p_{12} + p_{22}p_{11} \end{pmatrix}}{|\mathbf{P}|} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} |\mathbf{P}| & 0 \\ 0 & |\mathbf{P}| \end{pmatrix}}{|\mathbf{P}|} = \frac{|\mathbf{P}| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{|\mathbf{P}|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

故に、題意は示された。

練習問題 1.5.2-1 略 (Hint: 例えば, $\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$ などとして計算)

練習問題 1.5.2-2 すべて 0

練習問題 1.5.2-3

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

練習問題 1.6.2-1 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ とするとき, $x_1 = \frac{b_1}{b_2} \frac{a_{12}}{a_{22}} \bigg/ |\mathbf{A}|$, $x_2 = \frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{b_1}{b_2} \bigg/ |\mathbf{A}|$

練習問題 1.6.2-2 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ とするとき,

$$x_1 = \frac{b_1}{b_2} \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{a_{13}}{a_{23}} \bigg/ |\mathbf{A}|, \quad x_2 = \frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{b_1}{b_2} \frac{a_{13}}{a_{23}} \bigg/ |\mathbf{A}|, \quad x_3 = \frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{b_1}{b_2} \bigg/ |\mathbf{A}|$$

練習問題 1.6.2-3 $x = -\omega$, $y = 0$, $z = \omega + 1$

練習問題 1.6.2-4 略 (Hint: 0 割に対する場合分けに注意する)

練習問題 1.6.2-5 略 (Hint: 定義通り, $1/|\mathbf{A}|$ は共通であるから, 分子を実際の方程式に入れてみる)

練習問題 1.6.3-1 (1) $\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}} \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{pmatrix}$

練習問題 1.6.3-2 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) 略 (5) 略

練習問題 1.6.3-3 略 (Hint: $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} \therefore \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$)

練習問題 1.6.4-1 略

練習問題 1.6.4-2 $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

練習問題 1.6.4-3 (1) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, (2) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

第 2 章

練習問題 2.1.2-1 $aa = a \Leftrightarrow a^{-1}(aa) = a^{-1}(a) \Leftrightarrow ea = e \Leftrightarrow a = e$

または, $a = aa \Leftrightarrow a^{-1}(a) = a^{-1}(aa) \Leftrightarrow e = ea \Leftrightarrow e = a$

練習問題 2.1.2-2 $ab = ac \Leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Leftrightarrow eb = ec \Leftrightarrow b = c$

練習問題 2.1.2-3 $ab = e \Leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(e) \Leftrightarrow eb = a^{-1} \Leftrightarrow b = a^{-1}$

あるいは, $ab = e \Leftrightarrow (ab)b^{-1} = (e)b^{-1} \Leftrightarrow ae = b^{-1} \Leftrightarrow a = b^{-1}$

練習問題 2.1.2-4 $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = e$ であるから, $aa^{-1}(a^{-1})^{-1} = ae \Leftrightarrow e(a^{-1})^{-1} = a \Leftrightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

練習問題 2.1.2-5 単位群 $E = \{e\}$ の位数は 1, 群 $G = \{1, 2, 3\}$ の位数は 3

練習問題 2.1.3-1 略 (Hint: $e_p e_p = e_p$ であり, しかも, $e_p \in G$ である. したがって, $\exists e_p^{-1} \in G$ である. $e_p e_p = e_p$ の両辺に左から e_p^{-1} をかけると, $e_p^{-1} e_p = e_G \in G$)

練習問題 2.1.3-2 略 (Hint: x を $p \in P$ の逆元とすれば $xp = px = e_p = e_G$ である [前問より] . 群 G で $pp^{-1} = p^{-1}p = e_G$ である.)

第 3 章

練習問題 3.1.1-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.1.1-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.1.1-3 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.1.1-4 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.1.2-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.1.2-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.1.3-1 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

練習問題 3.1.3-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.2.2-1 (1) $\lambda = \pm 1, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{Ap} = \lambda \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$
 (2) $\lambda = \pm 2, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{Ap} = \lambda \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}^T$

練習問題 3.2.5-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.2.5-2 略 (Hint: $f(\mathbf{A}) = c_0 \mathbf{A}^n + c_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \mathbf{A} + c_n \mathbf{E}$ とする)

練習問題 3.2.6-1 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が相似である場合, ある $\mathbf{P}$ ($|\mathbf{P}| = p > 0$) により, $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ と書ける. $\therefore |\mathbf{B}| = |\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}| = |\mathbf{P}^{-1}| |\mathbf{A}| |\mathbf{P}| = p^{-1} |\mathbf{A}| p = |\mathbf{A}| \therefore |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$

練習問題 3.2.6-2 行列 $\mathbf{A}$ は n 次の正方行列であり, $\mathbf{e}_j$ は $n \times 1$ 型 (ベクトル) だから,

$\mathbf{Ae}_j$ は $n \times 1$ 型行列で, $\mathbf{Ae}_j = \{a_{ij}\} \ (i=1, 2, \dots, n)$ のベクトルは

$$\mathbf{Ae}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix}^T$$

であるので (下式), この縦ベクトルは行列 $\mathbf{A}$ の第 j 列の列ベクトルである.

$$\mathbf{Ae}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

練習問題 3.2.6-3 行列 $\mathbf{A}$ の固有値は $\lambda = 3, -2$, 固有ベクトルは $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}^T$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \therefore \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.2.6-4 行列 $\mathbf{A}$ の固有値は $\lambda = \pm 3$, 固有ベクトルは $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \therefore \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.2.7-1 $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ または, $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & -21 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

練習問題 3.2.7-2

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |\mathbf{Q}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ と比べると, 対角要素が反対になっています.}$$

練習問題 3.2.7-3

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)-6=0 \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)=0 \quad \therefore \lambda = 3, -2$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \Rightarrow \mathbf{p}_1 = (1 \ 1)^T, \mathbf{p}_2 = (2 \ -3)^T$$

$$|\mathbf{P}| = -3-2 = -5, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

次に,

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{Q}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

したがって, $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ は $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ の対角線の要素を入れ替えた対角行列になっている.

練習問題 3.3.3-1

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-1)-6 = \lambda^2 - \lambda - 6$$

$$\therefore \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + 6\mathbf{E}$$

$$\therefore \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + 6\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

練習問題 3.3.3-2

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \varphi(\lambda) = (\lambda-4)(\lambda-1) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \\
 \therefore A^2 &= 5A + 2E \\
 \therefore A^3 &= 5A^2 + 2A = 5(5A + 2E) + 2A = 27A + 10E \\
 \therefore A^3 &= 27 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix} \\
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

練習問題 3.4.1-1 略 (Hint: 定義通り; $A^* = (\overline{A})^T$)

練習問題 3.4.1-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.4.1-3 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.4.1-4

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= \overline{\mathbf{z}}^T \mathbf{w} \text{ と定義するとき,} \\
 (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \overline{\lambda \mathbf{a}}^T \mathbf{b} = \overline{\lambda} (\overline{\mathbf{a}}^T \mathbf{b}) = \overline{\lambda} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ および } \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \overline{\mathbf{a}}^T \lambda \mathbf{b} = \lambda (\overline{\mathbf{a}}^T \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\
 \mathbf{z} \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{z} \overline{\mathbf{w}}^T \text{ と定義するとき,}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z} \overline{\mathbf{w}}^T = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w}_1 & \overline{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \overline{w}_1 & z_1 \overline{w}_2 \\ z_2 \overline{w}_1 & z_2 \overline{w}_2 \end{pmatrix}$$

のように、複素行列となる。

練習問題 3.4.1-5

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_{21} & \overline{z}_{22} \end{pmatrix}, \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{w}_{11} & \overline{w}_{12} \\ \overline{w}_{21} & \overline{w}_{22} \end{pmatrix} \\
 \overline{AB} &= \overline{\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} z_{11}w_{11} + z_{12}w_{21} & z_{11}w_{12} + z_{12}w_{22} \\ z_{21}w_{11} + z_{22}w_{21} & z_{21}w_{12} + z_{22}w_{22} \end{pmatrix}} \\
 &= \begin{pmatrix} \overline{z_{11}w_{11} + z_{12}w_{21}} & \overline{z_{11}w_{12} + z_{12}w_{22}} \\ \overline{z_{21}w_{11} + z_{22}w_{21}} & \overline{z_{21}w_{12} + z_{22}w_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{12} \\ \overline{z}_{21} & \overline{z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w}_{11} & \overline{w}_{12} \\ \overline{w}_{21} & \overline{w}_{22} \end{pmatrix} = \overline{A} \overline{B} \\
 \therefore \overline{AB} &= \overline{A} \overline{B}
 \end{aligned}$$

練習問題 3.4.1-6 略 (Hint:)

$$A = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{21} \\ \overline{z}_{12} & \overline{z}_{22} \end{pmatrix}, B^* = \overline{B}^T = \begin{pmatrix} \overline{w}_{11} & \overline{w}_{21} \\ \overline{w}_{12} & \overline{w}_{22} \end{pmatrix}$$

あとは、定義通り)

練習問題 3.4.1-7 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.4.2-1 $(iA)^* = \bar{i}A^* = \bar{i}A^T = (-i)(-A) = iA$ 故に、エルミート行列である。

練習問題 3.4.2-2 (1) エルミート行列である。

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}^T = A^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = A$$

(2) エルミート行列ではない。

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}$$

練習問題 3.4.3-1 $(i\mathbf{A})^* = \bar{i}\mathbf{A}^* = \bar{i}\mathbf{A}^T = (-i)\mathbf{A} = -(i\mathbf{A})$ 故に, 反エルミート行列である.

練習問題 3.4.3-2 (1) 反エルミート行列ではない.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

(2) 反エルミート行列である.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}$$

練習問題 3.4.4-1

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^* &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \cdot (-i) & -i+i \\ i-i & i \cdot (-i)+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad \therefore \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{E} \end{aligned}$$

したがって, 行列 $\mathbf{U}$ はユニタリー行列である.

練習問題 3.4.4-2

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}^* = \bar{\mathbf{H}}^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \quad \therefore \mathbf{H}^* = \mathbf{H}$$

$$\textcircled{2} \quad |\mathbf{H} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2 &\Rightarrow \mathbf{H}\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p_{11} + ip_{21} = 2p_{11} \\ -ip_{11} + p_{21} = 2p_{21} \end{cases} \Rightarrow p_{11} = ip_{21} \Rightarrow \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow \mathbf{H}\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p_{12} + ip_{22} = 0 \\ -ip_{12} + p_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow p_{12} = -ip_{22} \Rightarrow \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

③ 略 (Hint:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{U}}^T = \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ \mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \left(\because \mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

練習問題 3.4.4-3

$$\mathbf{U}\overline{\mathbf{U}}^T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad \therefore \quad \overline{\mathbf{U}}^T = \mathbf{U}^{-1}$$

したがって、行列 $\mathbf{U}$ はユニタリー行列である。次に、 $\overline{\mathbf{x}}^T = \overline{(1 \ -i)} = (1 \ -i)$ ですから、

$$P = \overline{\mathbf{x}}^T \mathbf{U} \mathbf{x} = (1 \ -i) \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (1 \ -i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i + (-i) = 0$$

練習問題 3.4.4-4 略 (Hint: ユニタリー行列 $\mathbf{U}$ の固有値 λ_i ($i=1 \sim n$) と固有ベクトル

$\mathbf{p}_i$ ($i=1 \sim n$) について、 $(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{p}_i^* \mathbf{p}_j = 0$ ($i \neq j$) を示す)

練習問題 3.4.4-5 $\mathbf{U}^* = \overline{\mathbf{U}}^T \Rightarrow \mathbf{U}^* (\mathbf{U}^*)^{-1} = \overline{\mathbf{U}}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} = \overline{\mathbf{U}}^T (\overline{\mathbf{U}}^T)^{-1} = \mathbf{E}$ であり、 $\mathbf{U}^*$ はユニタリー行列。

練習問題 3.4.5-1 実行列 $\mathbf{A}$ が対称行列とすると、 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ である。また、行列 $\mathbf{A}$ は実行列であるから、

$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ である。また、 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} (= \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^2)$ である。ここで、

$$\overline{\mathbf{A} \mathbf{A}^T} = \overline{\mathbf{A}^T \mathbf{A}} \Leftrightarrow \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{A}^T} = \overline{\mathbf{A}^T} \overline{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \overline{\mathbf{A}^T} = \overline{\mathbf{A}^T} \mathbf{A} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A})$$

であるので、対称行列 $\mathbf{A}$ は正規行列である。

練習問題 3.4.5-2 略 (Hint: 固有値は？, 定義通り)

練習問題 3.4.5-3 題意から、

$$\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \end{pmatrix}, \quad \text{また,} \quad \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^T = \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi} = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\xi_n|^2 \end{pmatrix}$$

と書けます。そこで、

$$\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Xi} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{U}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = (\mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{U}^*)^* = (\mathbf{U}^*)^* (\mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi})^* = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^*$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = (\mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{U}^*) (\mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^*) = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{U}^* \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^*$$

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = (\mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^*) (\mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{U}^*) = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^* \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{U}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}^* \mathbf{U}^*$$

$$\therefore \mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A}$$

したがって、行列 $\mathbf{A}$ は正規行列である。

練習問題 3.4.6-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 3.4.6-2 略 (Hint: 定義通り)

第 4 章

練習問題 4.1.3-1 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x, y, 0)^T + (u, v, 0)^T = (x+u, y+v, 0)^T \in W^3$ であり、 $c \in \Re$ に対

して、 $c\mathbf{u} = (cx, cy, 0)^T \in W^3$ 。したがって、 W^3 は V^3 の部分空間である。

練習問題 4.1.5-1 $\mathbf{y} \in W$ ならば、 $\mathbf{y} = (y_1, 0, y_2, 0, y_3)$ ($y_1, y_2, y_3 \in \Re$) と書ける。このとき、

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, 0, x_2 + y_2, 0, x_3 + y_3) \in W$ である。また、 $\forall \lambda \in \Re$ に対し、

$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, 0, \lambda x_2, 0, \lambda x_3) \in W$ である。したがって、 W は V^5 の部分空間である。

練習問題 4.1.5-2 $W = W^1 + W^2$ と置く。 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ であるベクトルを、 $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$ と

書くとき、 $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in W^1$, $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in W^2$ としても一般性は失わない。このとき、

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + (\mathbf{r} + \mathbf{s}) = (\mathbf{p} + \mathbf{r}) + (\mathbf{q} + \mathbf{s}) \in W^1 + W^2 \quad (1)$$

$$\therefore W^1 + W^2 = W$$

次に, $\forall \mathbf{a} \in W, \forall \lambda \in K$ について, $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ ($\mathbf{p} \in W^1, \mathbf{q} \in W^2$) とするとき,

$$\lambda \mathbf{p} \in W^1, \lambda \mathbf{q} \in W^2 \quad \therefore \lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{p} + \lambda \mathbf{q} \in W^1 + W^2 = W \quad (2)$$

となる。したがって, 和空間 $W^1 + W^2 (= W)$ はベクトル空間 V の部分ベクトル空間である。

練習問題 4.1.6-1 $\ell, m, n \in \mathfrak{N}$ により, $\ell \mathbf{a}_1 + m \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ が成立する場合, $\ell = m = 0$ でなければならないの

で, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は 1 次独立である。一方, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ であるから, 1 次従属である。

したがって, $\dim W = 2$ である。

練習問題 4.1.6-2 $m \times n$ の行列 $\mathbf{A}$ の要素が $m \times n$ 個であるから, 行列 $\mathbf{A}$ が張るベクトル空間は $R^{m \times n}$

は 1 つずつ基が必要で, $\dim R^{m \times n} = m \times n$ であり, その基の例は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

である。

コメント: この場合, 次の $\mathbf{J}_{ij}(1)$ を使えます。

行列 $\mathbf{J}_{ij}(1)$ ($i, j = 1 \sim m, 1 \sim n$) を用いると, 行列

$\mathbf{A}$ ($m \times n$ 型行列全般) は,

$$\mathbf{A} = \sum a_{ij} \mathbf{J}_{ij}(1)$$

と表せる。このとき $k_{ij} = 0$ のときのみ,

$$\sum k_{ij} \mathbf{J}_{ij}(1) = \mathbf{O}$$

であり, $m \times n$ の行列全体を成すベクトル空間 V は $\mathbf{J}_{ij}(1)$ ($i, j = 1 \sim m, 1 \sim n$) が基底となる。したがって, $\dim V = m \times n$ である。因みに, 本書では, n 次の正方行列に関しては, 歪単位行列 $\mathbf{E}_{ij}^0(1)$ をすでに紹介している (項 1.3.4 (4) 参照)

$$\mathbf{J}_{ij}(1) = \left\{ \begin{matrix} & i \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & j \\ & n \end{matrix} \right\}$$

練習問題 4.1.6-3 2 つの要素を持つベクトルが空間を張る場合, 1 次独立なベクトル (基底ベクトル)

が 2 つある。したがって, $\dim R^2 = 2$

練習問題 4.1.6-4 3 つの要素を持つベクトルが空間を張る場合, 1 次独立なベクトル (基底ベクトル)

が 3 つある。したがって, $\dim R^3 = 3$

練習問題 4.1.7-1 $\mathbf{x} \in W_1 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{c}$ ここで, $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + 0 \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$ とかけるから, $\mathbf{x} \in W_2$

したがって, $W_1 \subset W_2 \cdots \textcircled{1}$ 。また, $\mathbf{y} \in W_2 \Rightarrow \mathbf{y} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$ と書け, さらに, $\xi \mathbf{a} = \mathbf{b}$ ですから, $\mathbf{y} = (\lambda + \xi) \mathbf{a} + \nu \mathbf{c}$ と書けるので, $\mathbf{y} \in W_1$ である。したがって, $W_1 \supset W_2 \cdots \textcircled{2}$ 。ここで, $\textcircled{1}$ および $\textcircled{2}$ により $W_1 = W_2$ である。

練習問題 4.1.7-2 W_1, W_2 の基底ベクトルを, それぞれ, $\mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_2^1, \dots, \mathbf{w}_r^1, \mathbf{w}_1^2, \mathbf{w}_2^2, \dots, \mathbf{w}_s^2$ とすば,

$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ であるから, これらすべてのベクトルは 1 次独立であるので, ベクトル $\mathbf{p}$ は,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{w}_i^1 + \sum_{j=1}^s \mu_j \mathbf{w}_j^2 \quad (1)$$

と表される。ここで, 仮定から, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, r), \mu_j (j = 1, 2, \dots, s) \in K$ である。

このとき、仮に、 $\xi_i (i=1, 2, \dots, r), \zeta_j (j=1, 2, \dots, s) \in K$ なる係数で、ベクトル $\mathbf{p}$ が

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \sum_{i=1}^r \xi_i \mathbf{w}_i^1 + \sum_{j=1}^s \zeta_j \mathbf{w}_j^2 \quad (2)$$

とあらわされたとする。ここで、式 (1) から式 (2) を差し引くと、

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{w}_i^1 + \sum_{j=1}^s \mu_j \mathbf{w}_j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^r \xi_i \mathbf{w}_i^1 + \sum_{j=1}^s \zeta_j \mathbf{w}_j^2 \right) = \mathbf{0} \\ \therefore & \sum_{i=1}^r (\lambda_i - \xi_i) \mathbf{w}_i^1 + \sum_{j=1}^s (\mu_j - \zeta_j) \mathbf{w}_j^2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となるが、 $\mathbf{w}_1^1, \mathbf{w}_2^1, \dots, \mathbf{w}_r^1 \in W_1$ および $\mathbf{w}_1^2, \mathbf{w}_2^2, \dots, \mathbf{w}_s^2 \in W_2$ であり、これらすべてのベクトルが、1 次独立であるから、 $\lambda_i = \xi_i$ ($i=1, 2, \dots, r$) および $\mu_j = \zeta_j$ ($j=1, 2, \dots, s$) であるから、ベクトル $\mathbf{p}$ は、ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ の和として一意に表される。Q.E.D.

練習問題 4.2.2-1 略 (Hint: 定義通り)

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & 0 \\ a_{22} & a_{21} & 0 \\ a_{32} & a_{31} & 0 \end{pmatrix} \quad)$$

練習問題 4.2.2-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 4.2.2-3 略 (Hint: 定義通り: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3$ 場合,

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} \\ b_{12}a_{11} & b_{12}a_{12} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ ですから、 $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^2$ の場合、成り立たない。))

練習問題 4.2.2-4 略 (Hint: 定義通り、直積を使うのが簡単)

$$\text{練習問題 4.2.2-5} \quad \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\bar{v}_1 & u_1\bar{v}_2 \\ u_2\bar{v}_1 & u_2\bar{v}_2 \end{pmatrix}$$

練習問題 4.2.3-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 4.2.3-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 4.2.4-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 4.2.4-2 $(\alpha\mu + \beta\rho + \gamma\sigma)\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$

練習問題 4.6.1-1 略 (Hint: 定義通り 式 4.6.1-6)

練習問題 4.6.1-2 略 (Hint: 定義通り 式 4.6.1-6)

$$\begin{aligned} \text{練習問題 4.6.1-3} \quad \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \mathbf{e}_x \frac{d(a \cos \omega t)}{dt} + \mathbf{e}_y \frac{d(b \sin \omega t)}{dt} + \mathbf{e}_z \frac{d(ct)}{dt} \\ &= (-a\omega \sin \omega t) \mathbf{e}_x + (a\omega \cos \omega t) \mathbf{e}_y + c \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{あるいは, } \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = (-a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t, c)$$

練習問題 4.6.2-1 $\mathbf{p} = (\sin x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{c}$ ここで, $\mathbf{c}$ は $d\mathbf{c}/dx = \mathbf{0}$ となる任意の定数ベクトル.

練習問題 4.6.2-2 $\mathbf{p} = e^{-\int x dx} \left\{ \int x^2 e^{\int x dx} dx + \mathbf{c} \right\}$ ここで, $\mathbf{c}$ は $d\mathbf{c}/dx = \mathbf{0}$ となる任意の定数ベクトル.

練習問題 4.6.4-1 $p=1$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W^\perp \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$)

練習問題 4.6.4-2 $W, W^\perp$ がともにベクトル空間 V の部分空間であるから, $\mathbf{0} \in W \cap W^\perp$ である.

ここで, $\exists \mathbf{a} \in W \cap W^\perp$ であるベクトル $\mathbf{a}$ があるとき,

$$\forall \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\mathbf{a}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

したがって, $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$

第 5 章

練習問題 5.1.1-1 略 1), 2) 3) (Hint: 定義通り まずは, 3×3 型でチェック)

練習問題 5.1.1-2 略 (Hint: 定義通り $\mathbf{P}^T$ は 3×2 型, $\mathbf{A}^T$ は 2×2 型, ゆえに, $\mathbf{P}^T \mathbf{A}^T$ 3×2 型)

練習問題 5.1.1-3 略 (Hint: 定義通り 順に計算

$$\text{例えば, } \alpha(\mathbf{AB}) = \{c_{ij}\} (i=1 \sim m, j=1 \sim \ell) = \left\{ \alpha \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) \right\} \quad)$$

練習問題 5.1.1-3 略 (Hint: 定義通り 計算力を試す問題.

実は, 因子行列を用いると容易に計算できるがここは頑張って要素で!)

練習問題 5.1.2-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 5.1.2-2 略 (Hint: 定義通り)

$$\begin{aligned} \text{練習問題 5.1.3-1 } \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ \therefore \text{tr}(\mathbf{AB}) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{tr}(\mathbf{AB}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a_{11}} & \frac{\partial}{\partial a_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial a_{21}} & \frac{\partial}{\partial a_{22}} \end{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \end{aligned}$$

練習問題 5.1.3-2 略 (Hint: 定義通り, 練習問題 5.1.3-1 参照)

練習問題 5.1.4-1 i 行の a_{ij} 以外はすべて 0 である場合は, $|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$

j 列の a_{ij} 以外はすべて 0 である場合も同じ, $|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$

練習問題 5.1.4-2 略 (Hint: $(\tilde{\mathbf{A}})^T (\mathbf{A}^T) (\tilde{\mathbf{A}}^T)$ を用いる)

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}/|\mathbf{A}| \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1} \therefore \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E} \text{ ですから,}$$

$$(\tilde{\mathbf{A}})^T (\mathbf{A}^T) (\tilde{\mathbf{A}}^T) = (\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}})^T (\tilde{\mathbf{A}}^T) = |\mathbf{A}|\mathbf{E}(\mathbf{A}^T) = |\mathbf{A}|(\mathbf{A}^T)$$

$$(\tilde{\mathbf{A}})^T (\mathbf{A}^T) (\tilde{\mathbf{A}}^T) = (\tilde{\mathbf{A}})^T \{(\mathbf{A}^T) (\tilde{\mathbf{A}}^T)\} = (\tilde{\mathbf{A}})^T |\mathbf{A}^T| \mathbf{E} = |\mathbf{A}|(\tilde{\mathbf{A}})^T$$

$$\therefore (\tilde{\mathbf{A}}^T) = (\tilde{\mathbf{A}})^T \quad (\because \mathbf{A}^T (\mathbf{A}^T) = (\mathbf{A}^T) \mathbf{A}^T = |\mathbf{A}^T| \mathbf{E})$$

練習問題 5.1.4-3 略 (Hint: $\mathbf{B}$ の要素を $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ として, $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ から, $\mathbf{B}$ の要素を $\mathbf{A}$ の要素で表す.)

練習問題 5.3.2-1 略

練習問題 5.3.2-2 $(x \ y) = (2 \ 1)$

第 6 章

練習問題 6.1.1-1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-c & b-c & 0 \\ a^2-ac & b^2-bc & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-c & b-c & 0 \\ a(a-c) & b(b-c) & 0 \end{vmatrix} = (a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

別解答 与式は, $a=b, b=c, c=a$ として, いずれも 0 となるので (因数定理),
 $(a-b), (b-c), (c-a)$

なる因数で因数分解可能であるから

$$D = k(a-b)(b-c)(c-a)$$

と書ける. ここで, D は主項は与式から bc^2 であるから, $k=1$ であることが分る.

したがって, $D = (a-b)(b-c)(c-a)$

練習問題 6.1.1-2

係数行列式を $D = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ とし, $x = D_1/D, y = D_2/D, z = D_3/D$ とすれば,

$$D = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} p & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = p(p+1) + 0 + (-1-p) = p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & p & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & p \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (p+1) + (2-p) + (-p-2p) = -3p+3 = -3(p-1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = p(p-2) + (2-p) = p^2 - 3p + 2 = (p-2)(p-1)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & p \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} p & p \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3p^2 + (p-2) + (-1-p) = 3p^2 - 3 = 3(p+1)(p-1)$$

1) $p=1$ の場合: $y=-1/2, x+z=3/2$ x, z は任意

2) $p=-1$ の場合: 不定

$$\begin{aligned}
 3) \quad p \neq \pm 1 \text{ の場合: } x &= D_1/D = -3(p-1)/(p+1)(p-1) = -3/(p+1) \\
 y &= D_2/D = (p-2)(p-1)/(p+1)(p-1) = (p-2)/(p+1) \\
 z &= D_3/D = 3(p+1)(p-1)/(p+1)(p-1) = 3
 \end{aligned}$$

練習問題 6.1.3-1

$$\tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21}$$

練習問題 6.1.3-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 6.1.3-3 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 6.1.3-4 略 (Hint: 定義通り)

第 7 章

$$\text{練習問題 7.1.1-1} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = y^2 + 2xz \quad \therefore \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial x} = 2z, \quad \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial z} = 2x$$

$$\text{練習問題 7.1.1-2} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x(xy - yz) + \mathbf{e}_y(z^2 - x^2) + \mathbf{e}_z(xy - yz)$$

$$\partial(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/\partial x = y\mathbf{e}_x - 2x\mathbf{e}_y + y\mathbf{e}_z$$

$$\partial(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/\partial y = (x-z)\mathbf{e}_x + (x-z)\mathbf{e}_z = (x-z)(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

$$\partial(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/\partial z = -y\mathbf{e}_x + 2z\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_z$$

練習問題 7.1.2-1

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial(2xz + y^2)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{e}_x \frac{\partial(2xz + y^2)}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial(2xz + y^2)}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial(2xz + y^2)}{\partial z} \\
 &= 2z\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y + 2x\mathbf{e}_z = 2(\mathbf{ze}_x + y\mathbf{e}_y + x\mathbf{e}_z) = 2\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

練習問題 7.1.2-2

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} y & z \\ y & x \end{vmatrix} + \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} z & x \\ x & z \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} x & y \\ z & y \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{e}_x(xy - yz) + \mathbf{e}_y(z^2 - x^2) + \mathbf{e}_z(xy - yz)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (xy - yz)^2 + (z^2 - x^2)^2 + (xy - yz)^2 \\
 &= 2x^2y^2 - 4xy^2z + 2y^2z^2 + z^4 - 2z^2x^2 + x^4
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{e}_x \frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial x} = 4xy^2 - 4y^2z - 4z^2x + 4x^3 = 4(xy^2 - y^2z - z^2x + x^3) = 4(x-z)(y^2 + x(x+z))$$

$$\frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial y} = 4x^2y - 8xyz + 4yz^2 = 4y(x^2 - 2xz + z^2) = 4y(x-z)^2$$

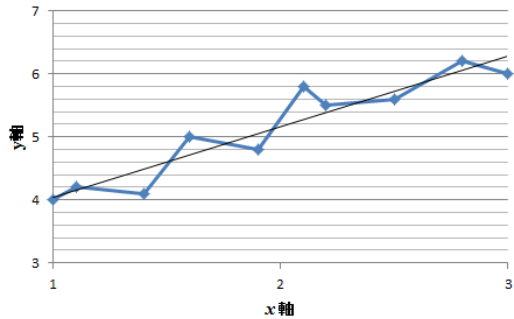
$$\frac{\partial |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2}{\partial z} = -4xy^2 + 4y^2z + 4z^3 - 4zx^2 = 4(-xy^2 + y^2z + z^3 - zx^2) = 4(z-x)(y^2 + z(z+x))$$

練習問題 7.2.1-1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ x_1(a_{11}y_1 + a_{21}y_2) + x_2(a_{12}y_1 + a_{22}y_2) \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \{x_1(a_{11}y_1 + a_{21}y_2) + x_2(a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \{x_1(a_{11}y_1 + a_{21}y_2) + x_2(a_{12}y_1 + a_{22}y_2)\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad \therefore \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad Q.E.D.
\end{aligned}$$

練習問題 7.2.1-2

- 1) 平均値 1.96, 5.12
- 2) 分散 σ_x, σ_y 0.43, 0.60
- 3) 相関係数 r 0.94
- 4) 回帰直線の式の傾き 1.13
- 5) 回帰直線とデータに関するグラフ



練習問題 7.3-1 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 7.3-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 7.4-1 4.766 (Hint: 定義通り)

練習問題 7.4-2 略 (Hint: 定義通り)

練習問題 7.5-1 略 (Hint: 定義通り, a, b, c は 3 軸上の実数)練習問題 7.5-2 略 (Hint: 定義通り, p_{ij} は点 P_i の座標)練習問題 7.6-1 $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} = \{\lambda_i \delta_{ij}\}$ とできるから, $\mathbf{E} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{X}$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} - \lambda \mathbf{E}| &= |\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} - \lambda \mathbf{X}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{X}| \\
&= |\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X}| = |\mathbf{X}^{-1}| |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| |\mathbf{X}| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|
\end{aligned}$$

$$\therefore |\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$$

であるから題意は証明された。

練習問題 7.7-1 内積空間の定義に従い, $\forall z \in \mathfrak{R}$ について, $\forall x, y \in \mathfrak{R}$ ならば

$$x \cdot y = xy, \quad y \cdot x = yx = xy \quad \Rightarrow \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(x+y) \cdot z = (x+y)z = xz + yz, \quad x \cdot z + y \cdot z = xz + yz \quad \Rightarrow \quad (x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

$$(\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) = \lambda xy = \lambda(x \cdot y) \quad (\lambda \in \mathfrak{R}) \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot x = x^2 > 0$$

したがって, $x \cdot y = xy$ は, x と y の内積である。したがって, 題意が証明できた。

演習問題 解答

第1章

$$\begin{aligned}
 1-1. \quad & (a+b) \cdot (a+c) = (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot c = a \cdot (a+b) + a \cdot c + b \cdot c = a \cdot (a+b+c) + b \cdot c \\
 & b+1 = b + (b+b') = (b+b) + b' = b+b' = 1 \\
 & \therefore a \cdot (a+b+c) = a \cdot 1 + a \cdot c = a + ac = a \cdot (1+c) = a \cdot (c+1) = a \cdot 1 = a \\
 & a \cdot (a+b+c) = a \cdot a + a \cdot (b+c) = a + a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (1+b) + a \cdot c \\
 & \therefore (a+b) \cdot (a+c) = a + b \cdot c \quad Q.E.D.
 \end{aligned}$$

1-2. 略 (Hint: 各ベクトルを位置ベクトルの扱いにする.)

例えば, $\mathbf{a} = \vec{OA}, \mathbf{b} = \vec{OB}, \mathbf{c} = \vec{OC}, \mathbf{p} = \vec{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ とする)

1-3. 略 (Hint: (1) $k \in \mathfrak{R}$ は k が正負が有り得ることに注意 (2) 三角形を用いる方法もあり)

1-4. 略 (Hint: 点 A, B, C, P, Q, R に対する位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$, 三角形 ABC の重心の位置ベクトルを $\mathbf{g}$, 三角形 PQR の重心の位置ベクトルを $\mathbf{g}'$ とするとき, 例えば, 線分 $\overline{AB}$ の中点 M の位置ベクトル $\mathbf{m}$ は $(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ であることなどを用いて, $\mathbf{g}$ および $\mathbf{g}'$ が, とともに, $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})/3$ となることを示せばよい.)

$$1-5. \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{a}\|\mathbf{b}-\mathbf{c}\| + \mathbf{b}\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\| + \mathbf{c}\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}-\mathbf{c}\| + \|\mathbf{c}-\mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|}$$

(Hint: 例えば, $\angle A$ の二等分線が線分 BC と交わる点 P の位置ベクトルを $\mathbf{p}$ とすると, $(\mathbf{i} - \mathbf{a}) = t(\mathbf{p} - \mathbf{a})$ と表せる. このとき, ベクトル $\mathbf{p}$ は, 次式の形式となる.)

$$\mathbf{p} = \frac{\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|}$$

1-6. 略

1-7. 略

1-8. 略 (Hint: $\cos \theta = (\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2) / (2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|)$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ などを用いる.)

1-9. 略 (Hint: 三等分する方法を拡張する)

1-10. 略

1-11. 略

1-12. $\Lambda = \{\delta_{ij}\} = \mathbf{E}$ であり, 単位行列 $\mathbf{E}$ は, 任意の行列と積に関して可換である. したがって, $\Lambda\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A}\Lambda = \mathbf{A}$. $\Lambda = \{\delta_{ij}\}$ は, 単位行列 $\mathbf{E}$ であることに注意.

1-13. 略

1-14. 略 (Hint: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ を用いる.)

1-15. $n!$

1-16. 数学的帰納法 (Hint: $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n)^{-1} = \mathbf{A}_n^{-1} \cdots \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}$ が成り立つならば, $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n+1})^{-1}$ はどうなるだろうか?)

1-17. 略 (Hint: 余因子展開 $|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$ を用いる.)

1-18. (Hint: $\mathbf{AB} = \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right\}$ であるから, $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}$ である)

1-19. (Hint: : 例えば,

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad)$$

1-20. (Hint: : 具体的に計算)

1-21. (1) 0 (2) -3

1-22. 略

1-23. 略

1-24. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$ (Hint: : $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{pmatrix}$ において, $\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{E}$ を計算する)

1-25. $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ とおくと, ,

$$x_1 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

第2章

2-1. 略 (Hint: $A \subseteq B$ とは, $\forall x \in A$ ならば, $\exists x \in B$ であること.)

2-2. 略 (Hint: $A \cap B$ や $A \cup B$ の要素に注意)

2-3. 略 (Hint: $a(bc) = (ba)c$ において, $c = e$ とすることで, $ab = ba$ を導く)

2-4. 略 (Hint: $ax = b, ax' = b$ が成り立つとする. ここで, $x = x'$ を示せば良い.)

2-5. (1) $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \Rightarrow a^{-1}a = e \in G \therefore (a^{-1})^{-1} a^{-1}a = (a^{-1})^{-1}, a = (a^{-1})^{-1}$

(2) $\forall a, b \in G \Rightarrow ab(b^{-1}a^{-1}) = abb^{-1}a^{-1} = e \Leftrightarrow b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$

(3) $\forall a \in G, \exists p \in G \Rightarrow ap = a \Leftrightarrow (a^{-1})ap = p = (a^{-1})a = e \therefore p = e \in G$

$\forall a \in G, \exists p \in G \Rightarrow pa = a \Leftrightarrow pa(a^{-1}) = a(a^{-1}) \therefore p = e \in G$

2-6. 略 (Hint: 定義 44 を用いて示せば良い.)

2-7. 略 (Hint: (1) $0a = (0+0)a = 0a+0a \therefore 0a = 0$ など

(2) $ab + a \cdot (-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0$ および (1) を使う

(3) $(a-a)(-b) = a(-b) + (-a)(-b) = 0$ および (2) を使う)

2-8. 略 (Hint: $\mathbf{X}\Psi = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Psi, \Phi\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \Phi$)

2-9. 略 (Hint: 和や積が体の要素であること, 交換法則が成立すること)

2-10. 略 (Hint: $a \neq 0, ap = 0; qa = 0$)

2-11. 環 R で, もし, 零因子がなければ, 与式は成り立つ. もし, 零因子があれば,

$a \neq 0, b \neq 0, ab = 0$ となる場合があり, このとき, $a \neq 0$ の場合, $ab = a0$ となるから $b \neq 0$ に反する. したがって, 零因子がない. ($\Rightarrow$ 可換環ならば整域)

2-12. 補題: a の位数を α として, $\exists k \in \mathbb{Z}$ に対して, $a^k = e$ であるとき, $k = \alpha p + q$ ($0 \leq q < \alpha$) とすれば $a^k = a^{\alpha p + q} = (a^\alpha)^p a^q = e^p a^q = e \therefore q = 0$ であるから, $k = \alpha p$ すなわち, k は α で割り切れる. 逆に, $k = \alpha p$ 場合は, $a^k = a^{\alpha p} = (a^\alpha)^p = e$ となり, 題意が証明された.

第3章

3-1. エルミート行列 $\mathbf{H}$ の固有値 $\lambda = 0, 2$, 固有ベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}^T$

$$\begin{aligned} 3-2. \quad \phi(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \phi(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \end{aligned}$$

$$3-3. \quad (1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} = (\bar{z}_1 \quad \bar{z}_2 \quad \cdots \quad \bar{z}_n) \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$$

$$(2) \quad \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 w_1 & z_1 w_2 & \cdots & z_1 w_n \\ z_2 w_1 & z_2 w_2 & \cdots & z_2 w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n w_1 & z_n w_2 & \cdots & z_n w_n \end{pmatrix} = \{z_i w_j\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

3-4. 行列 $\mathbf{H}$ がエルミート行列ならば, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^* = \overline{\mathbf{H}}^T$ であり, $|\mathbf{H}| = |\mathbf{H}^*| = |\overline{\mathbf{H}}^T| = |\overline{\mathbf{H}}|$ であるから, $|\mathbf{H}|$ は実数である. ($|\mathbf{H}| = a + bi$ ($a, b > 0$) とおけば, $|\overline{\mathbf{H}}| = a - bi$ ($a, b > 0$))

$$3-5. \quad (\overline{\mathbf{U}}^T \mathbf{H} \mathbf{U})^T = \mathbf{U}^T \mathbf{H}^T \overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^T \overline{\mathbf{H} \mathbf{U}} = \overline{\mathbf{U}^T \mathbf{H} \mathbf{U}} \\ \therefore \mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U} = (\mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U})^* \quad \text{であるから } \mathbf{U}^* \mathbf{H} \mathbf{U} \text{ はエルミート行列}$$

$$3-6. \quad \text{ここで, } \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \text{ を } \mathbf{Q}_1 = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}^*}{2}, \mathbf{Q}_2 = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}^*}{2i} \text{ とすれば } \mathbf{P} = \mathbf{Q}_1 + i\mathbf{Q}_2 \text{ である.}$$

次に, この $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ がエルミート行列であることを示す.

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{Q}_1} &= \overline{\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}^*}{2}} = \frac{\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{P}^*}}{2} = \frac{\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{P}^T}{2} \Rightarrow \mathbf{Q}_1^* = \overline{\mathbf{Q}_1}^T = \frac{(\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{P}^T)^T}{2} = \frac{\mathbf{P}^* + \mathbf{P}}{2} = \mathbf{Q}_1 \quad \therefore \mathbf{Q}_1^* = \mathbf{Q}_1 \\ \overline{\mathbf{Q}_2} &= \overline{-i \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}^*}{2}} = -i \frac{\overline{\mathbf{P}} - \overline{\mathbf{P}^*}}{2} = -i \frac{\overline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}^T}{2} \Rightarrow \mathbf{Q}_2^* = \overline{\mathbf{Q}_2}^T = i \frac{(\overline{\mathbf{P}} - \mathbf{P}^T)^T}{2} = -\frac{\mathbf{P}^* - \mathbf{P}}{2i} = \mathbf{Q}_2 \end{aligned}$$

すなわち, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ はそれぞれエルミート行列である. $Q.E.D.$

$$3-7. \quad 1 \quad (\text{Hint: } |\mathbf{U} \mathbf{U}^*| = |\mathbf{E}| = 1)$$

3-8. 略 (Hint: 対称行列とは式 1.3.3-7 を参照)

3-9. 略 (Hint: 直交行列とは式 1.3.3-9 を参照)

3-10. $\mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{E}$ で, 行列 $\mathbf{E} + \mathbf{U}$ に逆行列 $(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1}$ が存在するということは, 行列 $\mathbf{E} + \mathbf{U}$ が正則であることを示している. したがって, $|\mathbf{E} + \mathbf{U}| \neq 0$ である (仮定). ここで,

$$\mathbf{A} = i \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1} \text{ であるから,}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{U}) = i \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{U}) \Rightarrow \{\mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{U})\}^* = \{i \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{U})\}^*$$

である. そこで, 随伴を計算し, 両辺に左から $\mathbf{U}$ を乗ずれば,

$$(\mathbf{E} + \mathbf{U}^*) \mathbf{A}^* = i(\mathbf{U}^* - \mathbf{E}) \Rightarrow \mathbf{U}(\mathbf{E} + \mathbf{U}^*) \mathbf{A}^* = i\mathbf{U}(\mathbf{U}^* - \mathbf{E})$$

$$\Rightarrow (\mathbf{U} + \mathbf{E}) \mathbf{A}^* = i(\mathbf{E} - \mathbf{U}) \Rightarrow \mathbf{A}^* = i(\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{A} \quad \therefore \mathbf{A}^* = \mathbf{A}$$

となる. したがって, $\mathbf{A} = i \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{U})(\mathbf{E} + \mathbf{U})^{-1}$ はエルミート行列である.

3-11. 行列 $\mathbf{A}$ が交代エルミート行列ならば, $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$ であり, 両辺に左側から $\mathbf{A}$ を掛けると,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}\mathbf{A} \therefore \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} \therefore \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^* \text{ であるから題意は示された.}$$

3-12. n 次正方行列 $\mathbf{H}$ がユニタリー行列 $\mathbf{U}$ により実対角行列 Φ になったとすると, $\Phi = \mathbf{U}^*\mathbf{H}\mathbf{U}$ であり $\Phi^* = \overline{\Phi}^T = \Phi^T = \Phi$ (Φ は実の対角行列であるから対角線以外の要素は 0 である) ことに注意すれば, $\Phi^* = (\mathbf{U}^*\mathbf{H}\mathbf{U})^* = \mathbf{U}^*\mathbf{H}^*\mathbf{U} = \overline{\Phi}^T = \Phi^T = \Phi = \mathbf{U}^*\mathbf{H}\mathbf{U}$ であるから $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}$ であり, したがって, 正方行列 $\mathbf{H}$ はエルミート行列である.

3-13. n 次のユニタリー行列全体が作る集合を $\mathbf{Q}$ とし, その任意の 2 つの元を $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ とする. すなわち, $\forall \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathbf{U}$ であるとする. ここで, n 次の単位行列も $\mathbf{E}^*\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$ であるから, 単位行列も集合を $\mathbf{Q}$ の元と考えてよい.

さて, ユニタリー行列の定義 (定義 21) から,

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_1^*\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2\mathbf{U}_2^* = \mathbf{U}_2^*\mathbf{U}_2 = \mathbf{E} \in \mathbf{U}$$

であるから,

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)^* = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2(\mathbf{U}_2^*\mathbf{U}_1^*) = \mathbf{U}_1(\mathbf{U}_2\mathbf{U}_2^*)\mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_1\mathbf{E}\mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^* = \mathbf{E}$$

であり, したがって, $\forall \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathbf{U}$ について, その積の条件:

$$(\text{条件 } 1_G) \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 \in \mathbf{U}$$

が成り立つ.

また, 行列の結合法則が成り立つ (項 3.1.3) ので, $\forall \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3 \in \mathbf{U}$ について

$$(\text{条件 } 2_G) (\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_1(\mathbf{U}_2\mathbf{U}_3)$$

が成り立つ.

また, $\forall \mathbf{U}_1 \in \mathbf{U}$ に対して,

$$\forall \mathbf{U}_1 \in \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U}_1\mathbf{E} = \mathbf{U}_1 \Rightarrow \exists \mathbf{E} \in \mathbf{U}$$

であり, したがって, $\forall \mathbf{U}_1 \in \mathbf{U}$ について, その右単位元の存在条件

$$(\text{条件 } 3_G) \exists \mathbf{E} \in \mathbf{U}$$

が成り立つ.

また, $\forall \mathbf{U}_1 \in \mathbf{U}$ に対して,

$$\forall \mathbf{U}_1 \in \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^* = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_1^{-1} \Rightarrow \exists \mathbf{U}_1^{-1} \in \mathbf{U}$$

であり, したがって, $\forall \mathbf{U}_1 \in \mathbf{U}$ について, その右逆元の存在条件

$$(\text{条件 } 4_G) \exists \mathbf{U}_1^{-1} \in \mathbf{U}$$

が成り立つ.

したがって, ユニタリー行列は群を成す.

3-14. $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ を計算すると,

$$(\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = (\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z} \\ -\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{z}\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}^2 + \mathbf{y}\mathbf{z} - \mathbf{z}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{z} + \mathbf{z}^2$$

$$= \mathbf{x}(\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}) + \mathbf{y}(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{z}) + \mathbf{z}(-\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})$$

$$= \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 + 2\mathbf{x}\mathbf{y} + 2\mathbf{y}\mathbf{z} - 2\mathbf{z}\mathbf{x}$$

第4章

4-1. 略 (Hint: 整数の全体 $\mathbf{Z}$, 有理数の全体 $\mathbf{Q}$, 実数の全体 $\mathbf{R}$, 複素数の全体 $\mathbf{C}$ は全て通常の加法に関してアーベル群である. 一方, 自然数の全体 $\mathbf{N}$ は加法 (の逆演算としての減法) に関して閉じていないのでアーベル群ではない.)

4-2. $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$; $(a, b, c) \in \mathbf{R}$ と置けば, $a + b + c = a + c = 0 \quad \therefore a = b = c = 0$ であるから, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は 1 次独立である. $L^2: \|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

4-3. $W = W_1 \oplus W_2$ であるから, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. したがって, $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$.

4-4. $\mathbf{u} = (x, y)^T$ について, $\mathbf{u}_0 = (0, 0)^T$, $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)^T$ とする.

このとき, $\mathbf{u}_0 = (0, 0)$ ならば, すなわち, $x = 0, y = 0$ のときは,

$ax + by = a \times 0 + b \times 0 = 0$ であるから, ① $\mathbf{u}_0 = (0, 0)^T \in W$, すなわち, $\mathbf{u} \in W$

次に, $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)^T$, $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2)^T$ の場合,

$(ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 0$ であるから, ② $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in W$ である.

さらに, $\mathbf{u} = (x, y)^T$ の場合, $c \in \mathbf{R}$ について, $cax + cby = c(ax + by) = c \times 0 = 0$ であるから

③ $c\mathbf{u} \in W$ である. したがって, ①, ②, ③により

4-5. $x + y + z = 0$ から, $x = -y - z$ ですから, $(x, y, z)^T = (-y - z, y, z)^T$ となり, ここで, $(-y - z, y, z)^T = y(-1 \ 0 \ 1)^T + z(0 \ -1 \ 0)^T$ であり, $(-1 \ 0 \ 1)^T$ および $(0 \ -1 \ 0)^T$ が 1 次独立であることが自明である. したがって, $\dim W = 2$

4-6. 略 (Hint: 定義通り 1 次独立であること)

4-7. ノルムは
$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} = \sqrt{\begin{pmatrix} a & -ib \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ ib \end{pmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4-8. ない (Hint: ベクトル空間 V^2 のベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ とし, $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2)^T$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2)^T$ とすれば, それらの直積 $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ は,

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. ここで, 要素の議論を行う)

4-9. 略 (Hint:
$$\mathbf{E}^\sim = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix}$$
)

4-10.
$$\mathbf{E}_{11}^0(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{12}^0(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{21}^0(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{22}^0(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-11.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4-12. $\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, $\mathbf{Q} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, $\mathbf{R} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ とすれば,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{P} \\ \mathbf{Q} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{Q} \\ \mathbf{R} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{R}\end{aligned}$$

4-13. $\mathbf{E}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_{123}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_{123} + \mathbf{E}_{123}^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \quad \therefore \mathbf{E}_{123} = -\mathbf{E}_{123}^T\end{aligned}$$

4-14. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とし, $\begin{pmatrix} x+y \\ y-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = k\mathbf{a} + \ell\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{で} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ は 1 次独立であり,} \quad \therefore \text{Im } f = V^2 \Rightarrow \dim(\text{Im } f) = 2$$

$$\therefore \text{Ker } f = \{0\} \Rightarrow \dim(\text{Ker } f) = 0$$

4-15. (Hint: : 定義通り) (1) $\frac{d}{du}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d}{du}(a_x(u)b_x(u) + a_y(u)b_y(u) + a_z(u)b_z(u))$

$$(2) \quad \frac{d}{du}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d}{du} \{ (a_y(u)b_z(u) - a_z(u)b_y(u))\mathbf{e}_x + \cdots \}$$

4-16. $\int \mathbf{a} du = \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \right) \mathbf{e}_x + \left(u + \frac{1}{2}u^2 \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{2}u^2 \right) \mathbf{e}_z + \mathbf{c} \quad (\mathbf{c} : \text{任意の定数ベクトル})$

第5章

5-1. $m \times n$ 型行列 $\mathbf{A}$ および $n \times \ell$ 型行列 $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

とすると, $m \times n$ 型と $n \times \ell$ 型の積が行列 $\mathbf{C}$ だから, 行列 $\mathbf{C}$ は $m \times \ell$ 型となる.

c_{ij} は $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, \ell)$ である.

5-2. 行列 Δ の要素が δ_{ij} であることから, $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$ であることに気が付けばよい,

したがって, $\mathbf{A}\Delta = \Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}$ である.

5-3. 略 (Hint: 定義通り)

5-4. 略 (Hint: 定義通り)

5-5. 略 (Hint: 定義通り)

5-6. $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})}{\partial \mathbf{A}}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})}{\partial a_{11}} & \frac{\partial (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})}{\partial a_{12}} \\ \frac{\partial (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})}{\partial a_{21}} & \frac{\partial (a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})}{\partial a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5-7. 行列 $\mathbf{A}$ が逆行列を持つことから, 行列 $\mathbf{A}$ は正則行列であり, $|\mathbf{A}| \neq 0$ である. あるいは,

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{vmatrix} = |\mathbf{P}||\mathbf{Q}| \neq 0 \quad (\because |\mathbf{P}| \neq 0, |\mathbf{Q}| \neq 0)$$

である. ここで, 行列 $\mathbf{A}$ の行列を $\mathbf{A}^{-1}$ を $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{W} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}$ とすれば, 行列 $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ は m 次および n 次の正則行列, 行列 $\mathbf{W}$ は $n \times m$, 行列 $\mathbf{Y}$ は $m \times n$ 型の行列である. したがって,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{R} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{W} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{R}\mathbf{W} & \mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{R}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Q}\mathbf{W} & \mathbf{Q}\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^m\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & {}^n\mathbf{E} \end{pmatrix} = {}^{m+n}\mathbf{E}$$

と書くときの行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めることになる. ただし, ${}^m\mathbf{E}, {}^n\mathbf{E}, {}^{m+n}\mathbf{E}$ は, それぞれ, $m, n, m+n$ 次の単位行列である. 上式から,

$$\mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{R}\mathbf{W} = {}^m\mathbf{E}, \quad \mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{R}\mathbf{Z} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{W} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{Z} = {}^n\mathbf{E}$$

が得られる. これらの式から, $|\mathbf{P}| \neq 0, |\mathbf{Q}| \neq 0$ に注意すれば

$$\mathbf{W} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Q}^{-1} \quad \therefore \quad \mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{Y} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{Z} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{Q}^{-1}$$

となり, 逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ は

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{W} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix}$$

5-8.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{11}} & -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{12}} \\ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}{\partial a_{11}} & -\frac{\partial \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}{\partial a_{12}} \\ -\frac{\partial \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}{\partial a_{22}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial a_{11}} & \frac{\partial a_{12}}{\partial a_{11}} & -\frac{\partial a_{11}}{\partial a_{12}} & -\frac{\partial a_{12}}{\partial a_{12}} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial a_{11}} & \frac{\partial a_{22}}{\partial a_{11}} & -\frac{\partial a_{21}}{\partial a_{12}} & -\frac{\partial a_{22}}{\partial a_{12}} \\ \frac{\partial a_{11}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial a_{11}}{\partial a_{22}} & \frac{\partial a_{12}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial a_{12}}{\partial a_{22}} \\ -\frac{\partial a_{11}}{\partial a_{21}} & -\frac{\partial a_{12}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial a_{11}}{\partial a_{22}} & \frac{\partial a_{12}}{\partial a_{22}} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial a_{21}}{\partial a_{22}} & \frac{\partial a_{22}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial a_{22}}{\partial a_{22}} \\ -\frac{\partial a_{21}}{\partial a_{21}} & -\frac{\partial a_{22}}{\partial a_{21}} & \frac{\partial a_{21}}{\partial a_{22}} & \frac{\partial a_{22}}{\partial a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{11}^0(1) & \mathbf{E}_{12}^0(-1) \\ \mathbf{E}_{21}^0(-1) & \mathbf{E}_{22}^0(1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

5-9.

$$\text{rank } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\therefore \text{rank } \mathbf{A} = 2 \quad \left(\because \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \right)$$

5-10. (1) $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ (2) $x_1=-1, x_2=1, x_3=-1$

第6章

6-1. 略 (Hint: 定義通り)

6-2. 略 (Hint: 定義通り)

6-3. $m \times \ell$ (Hint: 行列 $\mathbf{A}$ の行数が m , 行列 $\mathbf{P}$ の行数が ℓ である)

6-4. 略 (Hint: 定義通り)

$$6-5. \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AP} & \mathbf{AQ} \\ \mathbf{CP} & \mathbf{CQ} + \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{A} = \mathbf{AP}, \mathbf{B} = \mathbf{AQ}, \mathbf{C} = \mathbf{CP}, \mathbf{D} = \mathbf{CQ} + \mathbf{R}$$

$$\therefore \mathbf{A} = \mathbf{AP}, \mathbf{C} = \mathbf{CP} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{AQ} \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{CQ} + \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{CQ} = \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\therefore \mathbf{P} = \mathbf{E}, \mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{R} = \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}$$

6-6. 6.5 の結果を用いると,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

これらの, 行列が含まれる行列の型は, $2n$ の正方行列であることに注意すれば, 与式 (a) を用いれば,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}| = |\mathbf{AD} - \mathbf{ACA}^{-1}\mathbf{B}|$$

である. 上式と与式 (b) と比較すると, $|\mathbf{AD} - \mathbf{CB}| = |\mathbf{AD} - \mathbf{ACA}^{-1}\mathbf{B}|$ が成立するためには,

$$\mathbf{C} = \mathbf{ACA}^{-1} \therefore \mathbf{CA} = \mathbf{ACA}^{-1}\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{CA} = \mathbf{ACE} \Rightarrow \mathbf{AC} = \mathbf{CA}$$

であるから, $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ の積に関して可換である.

第7章

$$\begin{aligned}
 7-1. \quad \Delta &= \nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \left(\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left(\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \left(\because \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1: i=j \\ 0: i \neq j \end{cases} \right)
 \end{aligned}$$

7-2. 題意の3次元ベクトルを $\mathbf{x} = \mathbf{e}_x x_1 + \mathbf{e}_y x_2 + \mathbf{e}_z x_3$ とすると,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x x_1 + \mathbf{e}_y x_2 + \mathbf{e}_z x_3 \right) \\
 &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \\
 &\quad + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \\
 &\quad + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y \frac{\partial x_2}{\partial x_3} + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \\
 &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \quad \left(\because \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1: i=j \\ 0: i \neq j \end{cases} \right) \quad \therefore \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 3
 \end{aligned}$$

7-3. 題意の n 次元ベクトルを $\mathbf{x} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$ とすると,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = n$$

7-4. (1) 略 (Hint: : 定義通り,) $\nabla^2(\phi\mathbf{a}) = \nabla \cdot \nabla(\phi\mathbf{a}) = \dots$

(2) 略 (Hint: : 定義通り)

$$\begin{aligned}
 7-5. \quad \{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})\}_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{a})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{a})_y \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) = \{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})\}_x - (\nabla^2 \mathbf{a})_x
 \end{aligned}$$

x 成分の証明ができた. y 成分や, z 成分も同様である. したがって,

$$\therefore \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

7-6. 式 7.1.3-11 から, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{0}$ を仮定すれば, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ であり, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ だから, 式 7.1.3-8 は,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

となる. ここで式 7.1.3-12 は, 時間で2次偏微分があるから, 上式を時間で偏微分すると,

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

が得られる. ここで, 式 7.1.3-6 は, 式 7.1.3-10 により,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

となるから,

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \Rightarrow -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

ここで、式 7.1.3-5 から、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$; $\rho = 0 \Rightarrow \nabla(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \Rightarrow \nabla \mathbf{E} = 0$ であり、したがって、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$ となる (演習 7.5 参照) ので、 $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ が得られる。

7-7.

$$|\mathbf{A}| = \sum \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_j & \cdots & p_n \end{pmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

$$\Delta = \sum \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_j & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

となる場合の係数 $\varepsilon(\quad)$ について、 p_i と p_j の間に m 個 (正数) の要素がある場合、交換は、

$$\begin{aligned} \cdots p_j p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_i \cdots &\Rightarrow \cdots p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_j p_i \cdots \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m \text{ 回}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m \text{ 回}} \\ &\Rightarrow \cdots p_{i+1} \cdots p_{i+m} \underbrace{p_i p_j}_{1 \text{ 回}} \cdots \Rightarrow \cdots \underbrace{p_i p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_j}_{m \text{ 回}} \cdots \end{aligned}$$

ということで、 $2m+1$ 回の交換をすることになる。これは、正数 m をどのように選んでも奇数となる。したがって、 $\Delta = -|\mathbf{A}|$ であり、符号は負となる。

- 7-8. 行列 $\mathbf{A}$ の固有値は $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ で求められ、その固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) は固有方程式 $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ を満たす。ここで、一般的に $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ と書けば、 $(\mathbf{A}^2)\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^2 \mathbf{x}$ である。これは、行列 $\mathbf{A}$ の固有値が λ である場合は、 $\mathbf{A}^2$ の固有値が λ^2 であることを示している。ここで、 $(\mathbf{A}^\ell)\mathbf{x} = \lambda^\ell \mathbf{x}$ ($1 \leq \ell \in \mathbb{N}$) が成り立つと仮定すると、 $(\mathbf{A}^{\ell+1})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\ell \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^\ell \mathbf{x}) = \lambda^\ell (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^\ell (\lambda \mathbf{x}) = \lambda^{\ell+1} \mathbf{x}$ が成り立つ。したがって、数学的帰納法により題意が証明された。

- 7-9. (1) 仮定より、

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \varphi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

と表しても、一般性は失わない。 $\varphi(\lambda)$ はまた、余因子展開で、

$$\varphi(\lambda) = (a_{11} - \lambda)D_{11} + a_{12}D_{12} + \cdots + a_{1n}D_{1n} = (a_{11} - \lambda)D_{11} + \{\lambda \text{ の } n-2 \text{ 次式}\}$$

ここで、

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{22} - \lambda)D_{22} + \{\lambda \text{ の } n-3 \text{ 次式}\}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (a_{11} - \lambda)[(a_{22} - \lambda)D_{22} + \{\lambda \text{ の } n-3 \text{ 次式}\}] + \{\lambda \text{ の } n-2 \text{ 次式}\} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)D_{22} + \{\lambda \text{ の } n-2 \text{ 次式}\} \\ &= \cdots \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \{\lambda \text{ の } n-2 \text{ 次式}\} \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + \{\lambda \text{ の } n-2 \text{ 次式}\} \end{aligned}$$

式 1

一方

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + (\lambda \text{ の } n-2 \text{ 次式})\end{aligned}$$

式 2

ここで、式 1 と式 2 を比較して

$$\therefore \operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$(2) \quad |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

ここで、 λ を 0 とすれば、

$$\lambda = 0 \Rightarrow |\mathbf{A} - 0\mathbf{E}| = |\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

7-10. 与式の行列 $\mathbf{A}$ の固有値は例題 3.2.5-2 で 2 および 7 と求まっている。したがって、

通常のトレース計算法では、 $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 4 + 5 = 9$ であり、一方、固有値から計算する方法からでは、

$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 7 + 2 = 9$ である。したがって、両者は一致することが確かめられた。

また、 $|\mathbf{A}| = 4 \times 5 - 6 \times 1 = 14$ であり、固有値から計算する方法からでは、 $|\mathbf{A}| = 7 \times 2 = 14$ である。したがって、両者は一致することが確かめられた。

7-11. n 次の正則行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ の余因子 $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ を用いると、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ の逆行列は、

$$\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}/|\mathbf{A}|, \quad \mathbf{B}^{-1} = \tilde{\mathbf{B}}/|\mathbf{B}|$$

であり、したがって、例題 5.1.4-3 を用いて、

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \tilde{\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}}/|\mathbf{AB}| = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\tilde{\mathbf{A}}}/|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

である。さて、上式を用いると

$$\begin{aligned}(\mathbf{ABC} \cdots \mathbf{XYZ})^{-1} &= \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{ABC} \cdots \mathbf{XY})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}(\mathbf{ABC} \cdots \mathbf{X})^{-1} \\ &= \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1} \cdots (\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1} \cdots \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{AB})^{-1} \\ &= \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1} \cdots \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\end{aligned}$$

ということで題意が証明された。

7-12. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ を用いると

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1 \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2 \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

ですから

$$\frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) (\mathbf{x} \times \mathbf{y})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1}{\partial x_1} & \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2}{\partial x_1} & \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1}{\partial x_2} & \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2}{\partial x_2} & \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_1}{\partial x_3} & \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_2}{\partial x_3} & \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

コメント $\frac{\partial(\mathbf{x} \times \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}$ とすれば、 $\mathbf{A}$ は交代行列である。

付録 公式集

ここに掲げる公式は、それぞれが成り立つための条件を満しているものとします。

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2) \quad \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2 = \prod_{i=1}^n a_i^2 \quad (a_i \neq 0: i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(4) \quad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (\text{logic})$$

$$(5) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$(6) \quad (\mathbf{AB})^n = \mathbf{A}^n \mathbf{B}^n \quad (\because \mathbf{AB} = \mathbf{BA})$$

$$(7) \quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(8) \quad |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

$$(9) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$(10) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(11) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})\} = 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$(12) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

$$(13) \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad \mathbf{c} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}|^2$$

$$(14) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} \mathbf{b} - \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} \mathbf{a} \\ = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{vmatrix} \mathbf{c} - \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{vmatrix} \mathbf{d}$$

$$(15) \quad |\tilde{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|^{n-1} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|} \quad \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$$

$$(16) \quad (\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \mathbf{P}, \quad (\mathbf{P}^{-1})^T = (\mathbf{P}^T)^{-1}, \quad (\tilde{\mathbf{P}})^{-1} = |\mathbf{P}|^{-1}\mathbf{P}, \quad |\mathbf{P}^{-1}| = |\mathbf{P}|^{-1}$$

$$(17) \quad (\mathbf{PQ})^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{P}^T, \quad (\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}^{-1}$$

$$(18) \quad |f(\mathbf{A}) - \lambda \mathbf{E}| = \left| p_0 \prod_{j=1}^m (\mathbf{A} - \alpha_j \mathbf{E}) \right|$$

$$(19) \quad \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$(20) \quad (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

$$(21) \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \sum_{\substack{(i,j) \leq 3 \\ i < j}} (a_i b_j - a_j b_i) (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^3)$$

$$(22) \quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$

$$(23) \quad \cos \theta_A = \frac{\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2}{2\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\|}, \quad \cos \theta_B = \frac{\|\mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2}{2\|\mathbf{c}\|\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos \theta_C = \frac{\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{c}\|^2}{2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$$

著者

今井 博 (いまい ひろし)

略歴

1978 年 3 月 北海道大学理学部地球物理学科卒
1980 年 3 月 東京大学大学院理学系研究科地球物理専門課程 修士課程修了
1983 年 3 月 東京大学大学院理学系研究科地球物理専門課程 博士課程修了
1983 年 3 月 理学博士号取得
1998 年 3 月 技術士（応用理学）取得
2019 年 5 月 現在
土木系コンサルタント会社物理探査業務に従事
早稲田大学 空間情報学 非常勤講師
昭和薬科大学 環境科学概論 元非常勤講師
土木学会地盤工学委員会火山工学研究小委員会 委員長
エンジニアリング協会 探査技術研究会 委員長

著書

「読むだけでわかる数学再入門 上・下」 山海堂
「耐震技術のはなし」（一部執筆）日本実業出版
「火山とつきあう Q & A 99」（一部執筆および編集）土木学会
「火山工学入門」（一部執筆および編集）土木学会
「火山工学入門 応用編」（編集）土木学会
「時空間情報学」共著 インデックス社
「読むだけでわかる数学再入門 微分・積分編」インデックス社
「読むだけでわかる数学再入門 線形代数編」インデックス社

