

読むだけでわかる

数学再入門

線形代数 編

今井 博 著

はじめに

線形代数？ それって、昔やったという記憶しかない、なんだっけ、という読者、仕事や研究でベクトルや行列・行列式について必要になったが、どの本で勉強したらよいかわからない読者をはじめとして、また、数学の授業でどうもよく意味が分からないという理工系の学生のために、懇切丁寧に、手取り足取り、ただし、宅配のように、お宅まで出張しませんが（^÷^），説明します。

線形代数は分かり易く言えば、線状に式が連結された代数学の一部門（返って分かりにくいですかね？），ベクトル空間およびその 1 次変換に関する理論を扱う代数学の一部門、そして、行列や行列式に関する理論を体系化した代数学の一部門、の総称とでも言う学問体系です、と言い換えても、さらに、何やらさっぱりって感じですかね、要は、高校で習う、ベクトルや行列などを扱う分野のことで、数学の専門用語で線形代数と呼びます、という事です。最近、ベクトルや行列などを習っていない生徒もいるようで、是非、ここで、線形代数を覗いてみてください。

さて、理学系・工学系の大学や学科に入って、数学科を卒業した先生の、いかにも「難しいのだ！」という印象を植え付けるような講義で、うんざりですよね、分かります、というか、実は、これが私の実体験です（T_T）。色々苦労したからこそ私は書きました。数学科を出た先生の書いた教科書は、ブライドからか、いかにも難しそうに、しかも途中の式変形を省略し、「どうだ、すごだろう、おまえらにはできないだろう」という書き方をしているようにしか私には思えません。しかし、実は、その講義内容は、そのほとんどが数学の先生がご自身で構築した数学体系ではなく、数 100 年前に確立した数学体系のコピーであり、それを恰も自分が組み上げたかのように、偉そうに講義しているのです。ちょっと言い過ぎかな？ そんなステレオタイプので分かりにくい授業を受けて苦労している、高校生や大学生、社会人に読んでもらいたいのです。どうせ書くなら、もっと、分かりやすく書けばいいのにと思います。

したがって、本書のコンセプトは「読むだけでわかる」ように書くことです。かと言って、漫画本のようにすらすらドラマを見るように読めるわけではありません。ある程度の数学的知識が必要になります。本書のレベルは高校生レベルから大学 1 年（教養の必修）で習うあたりです。勿論、本書 1 冊で線形代数の全ての分野を詳しく取り上げることは出来ませんし、する気もありません、数学科を出ていない私には数学の知識や能力に限界があります。ですから、本書では、私の説明できるレベルの範囲で、読者の目線に立ち、基礎的なあるいは実用的と考えられる知識をやさしく説明しようと思えます。とにかく、難しくないじゃん！、と読んでください。私が書いているくらいですから（^_^）。本書を読み、皆さんがさらに高度なレベルへとステップアップして頂けたら幸甚に思います。

さて、一番大事なのは、最後まで読むことです。ここで「読む」とは、数式の流れを目で見て、なるほど、と納得することです。なるほど、と言って頂けるように書くつもりです。例題は解答を見ないで解ける必要は全くありません。解答も読むだけで理解できるはずですが、本書では、式の変形は、目で追えるように、できる限り省略しないようにしています。ふむふむと流れを追ってください。難しそうと思われる場所では、キャラクターが注意点や説明不足を補ってくれます。

皆さん、読者のためになれば、はなはだ幸甚でございます。

2018 年 12 月

著者



1. 線形代数 I 2

1.1. 線形代数とは3	1.3.3. 行列の呼び名 44
1.1.1. 線形代数における表式 3	1.3.4. 他の行列 47
Gallery 1. 4	1.3.5. 行列のトレース 51
1.1.2. 1 次独立 5	1.3.6. 行列のノルム 53
1.1.3. 1 次従属 6	Gallery 4. 54
1.1.4. 数学記号 8	Short Rest 1. 55
1.1.5. 和積記号 9	1.4. 行列式 I 56
1.1.6. ブール代数 11	1.4.1. 行列式の表式 56
1.2. ベクトル I 13	1.4.2. 行列の余因子 59
1.2.1. 位置ベクトルの表式 13	1.4.3. 行列式の余因子展開 61
1.2.2. ベクトルの筆記表記 15	Gallery 5. 64
1.2.3. ベクトルのノルム 16	1.4.4. 行列式の性質 65
1.2.4. 単位ベクトル 17	1.4.5. 行列式の和の分離 65
1.2.5. ベクトルの幾何表現 18	1.4.6. 行列式の積の分離 67
1.2.6. ベクトル演算の定義 20	1.5. ベクトル II 79
Gallery 2. 25	1.5.1. スカラー三重積 79
1.2.7. 内積 (スカラー積) 26	Gallery 6. 80
1.2.8. ベクトル積 (狭義の「外積」) 29	1.5.2. ベクトル三重積 81
Gallery 3. 32	1.6. 連立 1 次方程式 82
1.2.9. 内積とベクトル積のまとめ 33	1.6.1. 逆行列による解法 82
1.2.10. 方向余弦 33	1.6.2. クラメルの式による解法 82
1.2.11. 有向平面 35	Gallery 7. 84
1.2.12. 媒介変数表示 36	1.6.3. 余因子による逆行列 85
1.3. 行列 I 40	1.6.4. 掃き出し法による逆行列 89
1.3.1. 行列の表式 40	演習問題 第 1 章 92
1.3.2. 行列の演算 40	Short Rest 2. 94

2. 群・環・整域・体 96

2.1. 群 97	2.2.3. 環の性質 107
2.1.1. 群の定義 97	2.2.4. 部分環 107
2.1.2. 群の性質 99	2.2.5. 整域の定義 108
Gallery 8. 101	2.2.6. 体の定義 108
2.1.3. アーベル群 102	2.2.7. 部分体 109
2.1.4. 部分群 103	2.3. 群・環・整域・体の定義表 110
2.2. 環・整域・体 106	Gallery 9. 110
2.2.1. 環の定義 106	演習問題 第 2 章 111
2.2.2. 零因子 107	Short Rest 3. 112

3. 線形代数 II 113

3.1. 行列 II 114	Gallery 12. 132
3.1.1. 零因子 114	3.3. ケーリー・ハミルトンの定理 133
3.1.2. 行列の分割による積 115	3.3.1. ケーリー・ハミルトンの定理とは 133
Gallery 10. 116	3.3.2. 定理 5 の証明 (1) 135
3.1.3. 行列の演算 117	3.3.3. 定理 5 の証明 (2) 135
3.2. 固有値 I 119	Gallery 13. 136
3.2.1. 固有ベクトル 119	3.4. 複素行列 137
3.2.2. 行列の固有値 119	3.4.1. 複素ベクトルと複素行列 137
3.2.3. 固有値の意味 120	Gallery 14. 140
Gallery 11. 121	3.4.2. エルミート行列, 141
3.2.4. 行列の三角化 122	3.4.3. 交代エルミート行列 143
3.2.5. 行列の相似形 (2 次形式) 127	3.4.4. ユニタリー行列 143
3.2.6. 行列の対角化 128	3.4.5. 正規行列 150
3.2.7. 固有ベクトルの交換 132	Gallery 15. 150

3.5. 2 次形式	151	Gallery 16.	154
3.5.1. 双 1 次形式	151	演習問題 第 3 章	155
3.5.2. 2 次形式とは	151	Short Rest 4.	156
3.5.3. 2 次形式の定義	152		

4. 線形代数 III 157

4.1. ベクトル空間の基礎	158	4.4. 行列空間	193
4.1.1. ベクトル空間の定義	158	4.4.1. 空間とは	193
4.1.2. 基底ベクトル	159	Gallery 18.	193
4.1.3. ベクトル部分空間	159	4.4.2. 行列空間	194
4.1.4. 共通ベクトル部分空間	160	4.5. 写像	195
4.1.5. ベクトル空間の和空間・直和	161	4.5.1. 写像の基礎	195
4.1.6. 次元 dim	163	4.5.2. 線形写像	195
4.1.7. 次元 dim の性質	165	4.5.3. 写像の種類	196
4.2. ベクトル III	171	4.5.4. 写像と階数	198
4.2.1. ベクトルの媒介変数表示	171	4.6. ベクトル IV	199
4.2.2. ベクトルの直積	177	4.6.1. ベクトルを微分	199
Gallery 17.	180	4.6.2. ベクトルの微分方程式	201
4.2.3. ウェッジ積の基礎	181	4.6.3. ベクトルと積分	201
4.2.4. ウェッジ積の拡張	184	Gallery 19.	202
4.3. テンソル	187	4.6.4. 内積空間 I	203
4.3.1. テンソルの基礎	187	Gallery 20.	204
4.3.2. テンソルの演算 I	189	演習問題 第 4 章	205
4.3.3. テンソルの演算 II	191	Short Rest 5.	206

5. 線形代数 IV 207

5.1. 行列 III	208	Gallery 22.	224
5.1.1. 積の結合・分配法則	208	5.2.3. 階数と方程式	225
Gallery 21.	208	Gallery 23.	228
5.1.2. 行列を偏微分	209	5.3. 逆行列とクラメールの式	229
5.1.3. 行列で偏微分	210	5.3.1. 元 1 次方程式	229
5.1.4. 行列式と余因子	211	5.3.2. 逆行列とクラメールの式	229
5.2. 階数	213	Gallery 24.	230
5.2.1. 行列の階数ランクとは	213	演習問題 第 5 章	231
5.2.2. 階数に関する定理と証明	214	Short Rest 6.	232

6. 線形代数 V 233

6.1. 行列式 II	234	Gallery 25.	238
6.1.1. 行列式の計算	234	演習問題 第 6 章	239
6.1.2. 複数列を含む行列式	235	Short Rest 7.	240
6.1.3. 行列式と余因子	237		

7. 線形代数 VI 補足 241

7.1. ベクトル IV 微分	242	7.5. ベクトル V 幾何問題	264
7.1.1. ベクトルを偏微分	242	7.5.1. 直線の式	264
7.1.2. ベクトルで偏微分	243	7.5.2. 面の式	265
7.1.3. ベクトル方程式	246	7.5.3. 三角関数	268
7.2. 直線内挿	248	7.6. 固有値 II	269
7.2.1. 回帰直線	248	7.6.1. 2 次形式と固有方程式	269
7.2.2. 双 1 次内挿	254	7.6.2. 行列の対角化と固有値	270
7.3. 平面内挿	256	7.6.3. 質点系の固有値	270
7.3.1. 面内挿の概念	256	7.7. 内積空間 II	271
7.3.2. 最小二乗法による面内挿	257	Gallery 27.	271
Gallery 26.	259	演習問題 第 7 章	272
7.4. 曲線内挿	260	Short Rest 8.	273
7.4.1. 双 3 次内挿	260	付録 公式集	274
7.4.2. その他の内挿	262		
索引	275		

ここで、本書でコメントなど話を進める上で登場してくれるいろいろなキャラクターを紹介しようと思います。皆さん、仲良くしてください。



本書の著者、 博

整理整頓を呼びかけるサトシ君



アイデアや Hint:を指摘するかし子さん

アイデアや Hint:を指摘するかしお君



グラフを紹介するずしき君

分析結果を紹介するためし君



例題を紹介するレイ子さん

例題を解答するカイト君



筆者のアシスタントのめもる君

筆者のアシスタントのたすく君



筆者のアシスタントのめぐみさん

厄介なことを引き受けるまかし君



問題解決処理の助っ人のしおりさん

また、ShortRest のコーナーでは、本書の内容の補足、全く関係ない topics や tips and tricks などを掲載します。Gallery のコーナーでは、著者が撮影した写真などや著者が描いた下手くそな絵など強制的に（笑）見てもらいます。

さあ、準備はできたでしょうか。それでは、早速、線形代数のスモールワールドを、楽しく、元気で、サーフィンしましょう。Let's get started !

基 礎 編

Γ Ψ Σ Ξ
 Δ Θ Λ
 Φ Υ Ω
 Π

線形代数 I

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

ここでは、まず、線形代数とは、一体、どのような数学形態なのか、概略を示して簡単に説明したいと思います。演算は、単なる数字の加減乗除ではありません。要は、高校時代に習ったベクトルや行列などに関する表式の復習と計算方法の拡張と言えば分かるでしょうか？ 内容的には、なんら変わりませんし、前に習ったことがある読者は、最初の部分は飛ばしても結構かと思います。最近、線形代数を高校で習わない読者もいるそうで、そんな読者にも入門書として読んで頂けたらと思います。

ここで、申し上げますが、ベクトルの添え字で、概ね、 x, y, z は 3 次元で、 xyz 軸への対応で、 $1, 2, \dots, n$ は n 次元で、一般的な説明で使います。後者は、 Σ 記号を使う場合に便利な場合にも使います。すなわち、 $x \leftrightarrow 1, y \leftrightarrow 2, z \leftrightarrow 3$ のように対応するということです。また、証明で用いる数学的帰納法については、十分承知されているということが前提で、説明なしに用います。数学的帰納法とは、整数 n が用いられている式、例えば、数列の n 項までの和を求める式を証明するとき、まず、 $n=1$ 、または、 $n=1$ および $n=2$ で与式が成立することを確かめたのちに、 $n=k$ のときに与式が成立すると仮定し、 $n=k+1$ の場合も成立するならば、与式が証明できた、とする例の定番の方法です。もう一つ、複素数の複素共役をご存知でしょうか？ 敢えて書くと、 $z = a + ib$ ($i = \sqrt{-1}$) と書く複素数の複素共役は $\bar{z} = a - ib$ ($i = \sqrt{-1}$) と書きます。ここで、高校レベルの言葉の準備ができました。その他の定義などは本文で紹介します。お楽しみに！

さあ、have a nice trip.



1.1. 線形代数とは

1.1.1. 線形代数における表式



言葉（呼び名）を覚えることは必須です。我慢して覚えましょう。我慢！我慢！

具体的なお話に入る前に、ここでは、本書で用いる言葉（呼び名）や式の表現形式（以下、表式と呼ぶ）について少々述べておきたいと思います。

そもそも、「線形代数」（linear algebra）とは一体何でしょうか？ 線形代数とは、数や文字、関数などが「直線状」に連結された式を扱う数学体系の1つです。その例の最も簡単な形式は、 $ax = b$ のような1元1次方程式で、未知数が n 個あれば n 元1次方程式（ n -unknown linear equations）と言うわけです。ところで、ご存知かと思いますが念のため、「次」は未知数の最大次数（何乗かということ）です。したがって、次式は3元方程式ではありますが、

$$x^3 - y^2 + z = 2$$

$$x^3 + y^2 - z = 0$$

$$x^3 + y^2 + z = 3$$

「元」と「次」の区別を確認しよう。



ならば、 x だけに関してもえば1元3次方程式、 y だけに関してもえば1元2次方程式、 z だけに関してもえば1元1次方程式と呼ぶわけです。しっかり頭の奥に入れましょう。

さて、1次変換（linear transformation）という言葉があります。例えば、点 (x, y) から点 (x', y') に変換される以下の式

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

(1.1.1-1)

などです。座標変換と同じ形式であり、これも、線形代数の対象となる式です。

線形代数で用いられる表式で、まず、「スカラー」と「ベクトル」の説明です。果たしてその定義は、英文字やギリシャ文字を用いて、

定義 1 スカラー（scalar） $a, e, \phi, \delta, \dots$

単なる数や関数の代表である文字を用いた表式 $a, f(x), |A|$ 等をスカラーと呼ぶ。

定義 2 ベクトル（vector） $\mathbf{a}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\delta}, \dots$

いくつかのスカラーや関数を括弧で括った形式をベクトルあるいは有向線分と呼ぶ。

$$\mathbf{a}, \vec{b}, \mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \mathbf{a} = (\alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_n)) \quad (1.1.1-2)$$

形式は複数あり、大きさ（長さ）と向きを持ち、括弧で括られた表式を要素と呼ぶ。

このとき、始点・終点が記載されないベクトル $\mathbf{a}$ は自由ベクトルと呼びます。また、 $\mathbf{p} = \vec{AB}$ のように点 A から点 B に向かうベクトルを位置ベクトル（)

1.1.1-1 参照）と呼びます。

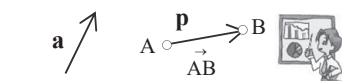


図 1.1.1-1 自由ベクトルと位置ベクトル

線形代数の表式で、ベクトルの表式に関しては、英文字やギリシャ文字の小文字の立体太文字を用います。一方、行列や行列式の表式に関しては、英文字やギリシャ文字の大文字の立体太文字を用います。さて、果たして、行列および行列式の定義は、

1.1. 線形代数とは

定義 3 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{E}, \Phi, \Delta, \dots$

いくつかの数や文字や関数やベクトルを括弧で括った形式を行列 (*matrix*) と呼ぶ。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{あるいは}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(x) & \cdots & f_{mn}(x) \end{pmatrix} \quad (1.1.1-3)$$

定義 4 行列式 $|\mathbf{A}|, |\mathbf{E}|, |\Phi|, |\Delta|, \dots$

絶対値を表す縦棒 2 本の中に要素を縦横同数並べた形式を行列式 (*determinant*) と呼ぶ。

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \text{あるいは}, |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} \phi_{11}(x) & \cdots & \phi_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(x) & \cdots & \phi_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad (1.1.1-4)$$

という表式です、ここで、「行列式」と呼ぶくらいですから行列式は計算式を意味します。ここに述べた、①スカラー、②ベクトル、③行列、④行列式が「直線状」に連結され、それぞれの演算方法が定義され、数学体系の一部門として成立しているのが線形代数です。

そもそも、なぜ、数字をこんな形にすることを考えたんでしょうね。例えば、これらの表式を使えば、上記の式 1.1.1-1 は、式 1.1.1-3 の表式を用いて、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.1.1-5)$$

と整理された線形表式の 1 式で表現できます。何故かは後述します。そのため、式 1.1.1-3 の表式の具体的な要素同士の演算方法を定義し、体系化する必要があります。

そして、線形代数は、高校では聞いたことが無い読者もいらっしゃるかと思います。ましてや、「線形代数は、群 (*group*) ・環 (*ring*) ・体 (*field*) などの代数学の概念や公理が基礎となっています」、と言われても、なんのことだか分かりませんよね。大丈夫！ ここでは、分からなくて良いのです (笑)。

しかし、1 次独立な (*linearly independent*) 式や 1 次従属な (*linearly dependent*) 式という言葉は文字面から、ボヤ〜としたイメージが湧きませんか？ やっぱ、いきなり難しいですか！、1 次独立？、1 次従属って何？、という読者には、ちょっと、ここで、さくっと、お優しいいただきましょう。ご存知の方も、確認の意味でさっと眺めてみられては如何でしょうか。何か得るものがあるかも・・・

Gallery 1.

右：海岸風景

水彩画 (模写)

(水彩画レッスン画材)

著者作成

左：茅ヶ崎海岸

烏帽子岩 写真

著者撮影



1.1.2. 1 次独立

さあ、思い出してください。「1 次独立」って何ですか。高校でやりませんでしたか？ 習っていない読者はここで覚えてください。線形代数の中で、重要な基本概念です。

定義 5 1 次結合あるいは線形結合

変数 $x_i (i=1\sim n)$ あるいは複数の関数 $f_i(x) (i=1\sim n)$ があり、その係数 $a_i (i=1\sim n)$ がスカラーであるとき、

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad (1.1.2-1)$$

$$a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \cdots + a_nf_n(x) = 0 \quad (1.1.2-2)$$

のように、あるいはまた、ベクトル $\mathbf{a}_i$ や行列 $\mathbf{A}_i$ の

$$a_1\mathbf{a}_1 + a_2\mathbf{a}_2 + \cdots + a_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad (1.1.2-3)$$

$$a_1\mathbf{A}_1 + a_2\mathbf{A}_2 + \cdots + a_n\mathbf{A}_n = \mathbf{O} \quad (1.1.2-4)$$

のような、直線的な連結を、1 次結合あるいは線形結合 (linear combination) と言う。

ここは、重要ですよ～。
よく考えてみてね。
0 や $\mathbf{0}$ ベクトルや $\mathbf{O}$ 行列となると
はどういう場合か、なのよ。



思い出しましたか？ しかし、「1 次結合」や「線形結合」って言葉が初めての読者は面食らいますよね。なんだそりゃって感じでしょうか。でも見ると、直線状に並んでいますでしょ。なんか、雰囲気ありますよね。これが、線形代数の「線形（線型と書く場合もあります）」という意味です。

ここで、念のために書いておきますが、0 は零（ゼロ）、 $\mathbf{0}$ は零ベクトル、 $\mathbf{O}$ は零行列と区別して書かねばなりません。それらの具体的な表式は後述します。

定義 6 1 次独立あるいは線形独立

式 1.1.2-1 から式 1.1.2-4 で、スカラーの係数が $a_i (i=1\sim n)=0$ のときのみ成り立つ場合、変数 x_i 、関数 $f_i(x)$ 、ベクトル $\mathbf{a}_i (i=1\sim n)$ 、あるいは、行列 $\mathbf{A}_i (i=1\sim n)$ は、1 次独立である、あるいは、線形独立である、と言う。

そうでない場合は、というと、係数 $a_i (i=1\sim n)$ の中の、少なくとも、1 つは常に 0 でない係数があることになりますよね。この場合は、次項で説明します「1 次従属」という場合です。自身で会社を興して独立した人と、独立せずに会社に勤務している人（従業員）、というのに似ていませんか？ 批判を受けそうなので弁解しますと、この例では、どっちが良い、という話ではありません（笑）。

さて、ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ と書くとき、 $x_1, x_2, \dots$ を要素と呼びます。簡単な例でいえば、ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T, \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ の要素は、0 か 1 です。これらのベクトルが、1 次結合で $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ であるならば、

$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_1(1, 0, 0)^T + a_2(0, 1, 0)^T + a_3(0, 0, 1)^T = (a_1, a_2, a_3)^T = (0, 0, 0)^T = \mathbf{0}$ であり、上式は $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ のときのみ成立します。このとき、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は 1 次独立である、と言うわけです。さあ、気になるベクトルの右肩にある「 T 」は、「転置した transposed」を意味します。ベクトルは本来、各要素を縦に並べる表式が基本です。上記では、転置は、文章行内にベクトルの要素表示を書く場合に便利で、「縦の表式を横の表式で書きました」、ということを示す印です。本書内では「 T 」は頻繁に出てきますので、覚えておいて下さい。また、練習問題 1.1.2-3 の $\lambda (\in \mathbb{R})$ は、 λ が実数であるという意味です。

1.1. 線形代数とは

練習問題 1.1.2-1 3個の要素を持つベクトル $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ が1次独立であることを示せ。

練習問題 1.1.2-2 3個の要素を持つベクトル $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ が1次独立であるための a の条件は何か？

練習問題 1.1.2-3 1つのベクトル $\mathbf{a}$ がスカラー係数 $\lambda (\in \mathfrak{R})$ によって $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}$ と書く場合、ベクトル $\mathbf{a}$ が1次独立であるか、1次従属であるか、について論じよ。

1.1.3. 1次従属

1次独立に対して、1次従属という言葉があります。なるほどそうですね、と思われますでしょうか？ 前項 1.1.2 で説明しましたように、1次結合の話であることは間違いないのですが、相対する「独立」と「従属」の違いを考えながら定義を見てください。

一般的に、子供は親に従属していて、独立して巣立つ、というのと、ここでいう定義をご覧になると、似て非なる概念であることが分かります(笑)。

定義 7 1次従属

次の1次結合

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0 \quad (1.1.3-1)$$

で、スカラーの係数 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 中の少なくとも1つ、0でない係数がある場合、その係数を $a_k (\neq 0, 1 \leq k \leq n)$ (「 $\neq$ 」は、この右辺と左辺は等しくない、という記号) とすれば、式 1.1.3-1 は次式のように表すことができる。

$$f_k(x) = -\frac{a_1}{a_k} f_1(x) - \cdots - \frac{a_{k-1}}{a_k} f_{k-1}(x) - \frac{a_{k+1}}{a_k} f_{k+1}(x) - \cdots - \frac{a_n}{a_k} f_n(x) \quad (1.1.3-2)$$

ここで、

$$b_j = -a_j / a_k \quad (j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \quad (1.1.3-3)$$

とするならば、式 1.1.3-2 は、

$$f_k(x) = b_1 f_1(x) + \cdots + b_{k-1} f_{k-1}(x) + b_{k+1} f_{k+1}(x) + \cdots + b_n f_n(x) \quad (1.1.3-4)$$

と表せる。このとき、

$$f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f_k(x), f_{k+1}(x), \dots, f_n(x) \quad (1.1.3-5)$$

は1次従属であるという。

ここで、重要なのは、0でない係数があるか無いかです。難しいことはないのです。

こんな感じです。1次独立と1次従属が分かりましたか。大したことはないのです。まあ、単なる呼び名です。言葉の意味が分かれば、数学はちょっと私には・・・と自分で思い込んでいる読者は、なあ~んだと、気抜けしたかも知れませんね。

さて、例題を見てみましょう。

例題 1.1.3-1

関数 $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ が、1次独立であるとき、係数 $\lambda_i, \mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$ があって、 $\sum \lambda_i f_i = \sum \mu_i f_i$ ならば、 $\lambda_i = \mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$ であることを示せ。

さあ、どう解答を書きますか？ 実は、そんな難しくはありませんよ。解答を見てびっく



りですよ。こんな簡単なのかって。以下の2行で終わる解答を見てください。



例題 1.1.3-1 解答

$\sum \lambda_i f_i = \sum \mu_i f_i$ ならば $\sum (\lambda_i - \mu_i) f_i = 0$ であり、関数 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ が1次独立であるから、 $\lambda_i - \mu_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ すなわち、 $\lambda_i = \mu_i (i=1, 2, \dots, n)$ である。

という解答で十分です。係数の比較だけの問題です。おお、簡単！

もう1つ、簡単な例題を見ましょう。でも、これは、ちょっと工夫が要りますよ。さあ、答えを想像してみましょう。



例題 1.1.3-2

関数 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ が1次独立で、関数 g と関数 f_i が1次従属である場合、 g は f_i の1次結合で表され、その表現式は1通りであることを示せ。

まず、関数 g と関数 f_i が1次従属であるということをもどのように表現するか、です。係数を導入して、1次結合で式を書きましょう。解答は2段階に分けて行います。



例題 1.1.3-2 解答

題意により、係数 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 、 μ を用いて、 $\sum \lambda_i f_i + \mu g = 0$ と書ける（1次結合）。ここで、 $\mu = 0$ ならば λ_i の中に0でないものがあることになる。これは f_i が1次独立であるという題意に反する。ゆえに、係数 μ は $\mu \neq 0$ である。そこで、 $p_i = -\lambda_i / \mu$ として、 $g = \sum (-\lambda_i / \mu) f_i = \sum p_i f_i (i=1, 2, \dots, n)$ とすれば、 g は f_i の1次結合で表される（第一段階）。

ここで、係数 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ と異なる係数 $q_i (i=1, 2, \dots, n)$ を用いて、

$$g = \sum q_i f_i (i=1, 2, \dots, n)$$

と書けるとするならば、

$$\sum p_i f_i - \sum q_i f_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$$

であり、すなわち、 $\sum (p_i - q_i) f_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$ である。ここで、 f_i は1次独立なので、 $p_i - q_i = 0$ 、すなわち、 $p_i = q_i (i=1, 2, \dots, n)$ である（第二段階）。

したがって、 g は f_i の1次結合で表され、その表現式は1通りである。

1次独立は、
係数に注目！



如何でした？ 上記の証明は線形代数では定番です。ちょっと、ややこしかったでしょうが？ めげない！ めげない！ これは基礎ですから。例題 1.1.3-2 で書いたように、関数 f_i が1次独立なので、その1次結合が0である場合は、その係数がすべて0でなければならない、ということが必要十分条件なのです。この基本概念を覚えてください。

練習問題 1.1.3-1 ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について、 $\mathbf{a} = (2 \ -1 \ 3)^T, \mathbf{b} = (1 \ 3 \ 2)^T$ のとき、 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{c}$ の要素を求めよ。

練習問題 1.1.3-2 ベクトル $\mathbf{a} = (1 \ 1 \ 0)^T, \mathbf{b} = (1 \ 0 \ 1)^T, \mathbf{c} = (0 \ 1 \ 1)^T$ が1次独立であることを示せ。

練習問題 1.1.3-3 次のことを証明せよ

- (1) 1次独立なベクトルから幾つかのベクトルを取っても1次独立であること。
- (2) 1次従属なベクトルに幾つかのベクトルを加えても1次従属であること。

1.1. 線形代数とは

1.1.4. 数学記号

以下に示すのは、本書で用いる数学記号です。特に断らないで使います。ただし、詳細の説明が必要な場合はそこで説明します。他の教科書とは統一性がないのでご注意ください！

1) 「数」関連記号

K : 代数的数全体の有限的な部分集合

P : 素数(prime number)の全体, 空間など

N : 自然数(natural number)の全体; 正数: $\mathbb{N}$

Z : 整数(独: Zahlen)の全体; **Q** : 有理数(Quotient)の全体

A : 代数的数(algebraic number)の全体, アフィン空間 (affine space)

C : 複素数(complex number)の全体; $\mathbb{R}$: 実数部(real); $\mathbb{I}$: 純虚数(imaginary)

Re : 実数部(real part); **Im** : 虚数部(imaginary part)

C^n : 複素数 n 次元ベクトル群; V^n : n 次元ベクトル空間(総称)

G : 群(group); G_C : 巡回群; G_H : 半群(semigroup); G_S : 部分群; G_U : 単位群,

R : 環(ring); R_0 : 零環; R_f : 整域; **F** : 体(field); Λ : 単位的環; F_S : 部分体



これらの記号の全部を覚えるのは至難の業です。この頁は印刷して、本書を読むとき、手元に置いておくとう便利じゃないかな！

2) 「集合(set)」関連記号 (流儀で異なる)

$=$: 集合の一致(equal all elements)

$\subseteq$: 部分集合(subset); $\not\subseteq$: 部分集合の否定(not subset)

$\subsetneq$: 真部分集合(proper subset); $\subset$: 真部分集合(proper subset)

$\in$: 元(element); $\notin$: 非元(not element); $\emptyset$: 空集合(要素がない) (empty set)

$\forall$: 全称記号「全ての」(for all, for any); $\exists$: 存在記号(for some, existing)

$\bigcap_i A_i$: 共通集合(intersection); $\bigcup_i A_i$: 和集合(union)

$\vee$: 結び(join); $\wedge$: 交わり(meet)



3) 「演算」関連記号

$\approx$, $\cong$, $\simeq$: 約, ほぼ(nearly equal to); $\sqrt{\quad}$: 根号; $\sqrt[k]{\quad}$: k 乗根

$\leq$ または $\leq$: 以下(not greater than); $\geq$ または $\geq$: 以上(not smaller than)

$\ll$: よりかなり小さい(fairly small); $\gg$: よりかなり大きい(fairly large)

$\neq$: 等しくない(not equal); $\equiv$: 合同(congruence); $\angle$: 角($\angle R$: 直角)

∞ : 無限大(infinity); $\sim$: 相似(similarity); $\propto$: 比例(proportion)

$\parallel$, $\parallel$: 平行(parallel); $\nparallel$: 非平行(non-parallel); $\perp$: 直角(right angle)

$\therefore$: 故に, したがって(therefore); $\because$: 何故なら(because)

$\vee$: 論理和(logical sum); $\wedge$: 論理積(logical product); $\wedge$: ウェッジ積(wedge)

$\oplus$: 直和(direct sum); $\otimes$: 直積(direct product); $\|\mathbf{x}\|$: ベクトルのノルム(norm)

$*$: コンボリューション(convolution); $\cdot$: 内積; $\times$: ベクトル積(外積)

∇ : ナブラ(nabla); Δ : ラプラシアン(Laplacian); $\square$: ダランベリアン(d'Alembertian)

$\sum$: 総和記号, シグマ記号(summation); $\prod$: 総乗記号, パイ記号(power)

$\dim$: 次元; rank : 階数; ord : 位数; $\sup$: 上限(supremum); $\inf$: 下限(infimum)

$\text{mod}(n \equiv m \pmod{d})$ は n と m が d を法として合同であることを示す

- 練習問題 1.1.4-1 $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ と書くとき、その意味を記せ。
- 練習問題 1.1.4-2 $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ と書くとき、その意味を記せ。
- 練習問題 1.1.4-3 $\forall a \in \mathbf{P}$ と書くとき、その意味を記せ。ただし、 $\mathbf{P}$ は素数全体である。
- 練習問題 1.1.4-4 $\sqrt[3]{27}$ を簡単にせよ。
- 練習問題 1.1.4-5 $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ と書くとき、その意味を記せ。
- 練習問題 1.1.4-6 集合 Φ および集合 Θ があって、 $\Phi \subseteq \Theta$ と書くとき、その意味を記せ。
- 練習問題 1.1.4-7 集合 Φ および集合 Θ があって、 $\Phi \not\subseteq \Theta$ と書くとき、その意味を記せ。

1.1.5. 和積記号

線形代数では、総和記号 (Σ 記号) を頻繁に使います。表式を簡易に書くことができる便利さからです。記号は記号です。「難しいとか難しくないとか」ではありません。単なる表現形式ですから慣れるしかありません。似ていますが、総乗記号は覚えていますか。ここで、ちょっとおさらいをしておきましょう。総和記号および総乗記号の基本的な表式は、以下の (1) および (2) のように書きます。

(1) 総和記号 (Σ 記号)

省略できる場合があるんだ。

例えば、 n 個の数 a_i ($i=1, 2, \dots, n$) を全て加える場合、その結果を S とすると、

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, \text{ あるいは, } S = \sum a_i, \text{ あるいは, } S = \sum_i a_i \quad (1.1.5-1)$$

と書きます。

これらの約束事は覚える必要がありますよ。

(2) 総乗記号 (Π 記号)

例えば、 n 個の数 a_i ($i=1, 2, \dots, n$) を全て乗ずる場合、その結果を P とすると、

$$P = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \prod_{i=1}^n a_i, \text{ あるいは, } P = \prod a_i, \text{ あるいは, } P = \prod_i a_i \quad (1.1.5-2)$$

と書きます。さて、例題で実際の計算を見てみましょう。

例題 1.1.5-1 次の計算をせよ。

$$(1) \sum_{i=1}^n 1 \quad (2) \sum_{i=1}^n i \quad (3) \sum_{i=1}^n i^2 \quad (4) \prod_{i=1}^n 1 \quad (5) \prod_{i=1}^n i$$

この例題は重要です。何故かという、特に、総和記号は、この意味が分らないと、これから本書を読み進める上で支障を来す可能性があるからです。総和記号・総乗記号は、頻繁に出てきます。ここで、良くお復しくださいますようお願い致します。

例題 1.1.5-1 解答

$$(1) \sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_n = n \quad \therefore \sum_{i=1}^n 1 = n$$

$$(2) \sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+(n-1)+n = n+(n-1)+\dots+2+1$$

$$\therefore 2 \sum_{i=1}^n i = \underbrace{(n+1)+\dots+(n+1)}_n = n(n+1) \quad \therefore \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

要は和の順番を変えて、

$$P = \overbrace{1+2+\dots+(n-1)+n}^n$$

$$P = n+(n-1)+\dots+2+1$$

$$2P = n(n+1) \quad \therefore P = n(n+1)/2$$

1.1. 線形代数とは

(3) 別解もありますが*, ここでは漸化式を用いてみます。

$$\begin{array}{rclcl} (n+1)^3 - n^3 & = & 3n^2 & + 3n & + 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 3^3 - 2^3 & = & 3 \times 2^2 & + 3 \times 2 & + 1 \\ 2^3 - 1^3 & = & 3 \times 1^2 & + 3 \times 1 & + 1 \end{array}$$

右辺, 左辺を縦に加えると, 左辺はほとんどが相殺し,

$$\therefore (n+1)^3 - 1^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

となる。したがって

$$3 \sum i^2 = (n+1)^3 - 1 - 3 \sum i - \sum 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$6 \sum i^2 = 2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n(n+1) - 2n = 2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore \sum i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(4) \quad \prod_{i=1}^n 1 = \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_n = 1 \quad \therefore \prod_{i=1}^n 1 = 1$$

$$(5) \quad \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n! \quad \therefore \prod_{i=1}^n i = n!$$

別解もありますので, 読者にいろいろ考えてもらおうかな。



となります。因みに, $n!$ は n の階乗 (factorial) と呼びます。記号は恐れるに足らずです。例題解答の (3) で, この漸化式を用いる方法から考えると, $\sum i^3$ は 4 乗の式, $\sum i^4$ は 5 乗の式を用いればできそうですね。ここでは, 解答は書きませんが, 自分でペンをとって, 奮闘されるのも良いのではないのでしょうか。きっと何か有意義なことが得られるかもね。

コンピュータで使用されているソフトウェアで, 例えば, エクセル (Excel) という表計算ソフトウェアがあります。エクセルでは, 表計算やグラフ化が可能です。例えば, エクセルのセルで利用できる表計算の関数で「= sum()」が Σ 記号に相当します。図 1.1.5-1 を見てください。() の中に連続したセルの最初と最後の 2 つのセルの識別記号を「:」でつないで入力する, すなわち, セル「A1」からセル「A10」まで入力されている数字の総和は, =sum(A1:A10) として, セル「A11」に入力すると総和が自動で計算され, セル「A11」に総和の結果が自動で書かれるのです。図 1.1.5-1 では, セル「A1」からセル「A10」まで入力されている数字の総和がセル「A11」に表示されています。便利ですね。エクセルを知らない, 使わない読者にはすいません。でも使うと便利です。色々, 出来ますので。

	A		A
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
11	=SUM(A1:A10)	11	55

図 1.1.5-1 エクセルの総和機能



どうでしょう。難しそうな数学用語に負けないでください。和と積の記号の意味が分かればよいです。例題 1.1.5-1 をもう一度見て, 納得してください。



練習問題 1.1.5-1 奇数は自然数 n ($n \in \mathbf{N}$) を用いて, $2n-1$ と表せる. 実際, $2n-1$ に 1, 2, 3, $\dots$, のように代入すると, 1, 3, 5, $\dots$, が得られる. そこで, 奇数の n 項までの和を求めよ. また, 偶数 $2n$ ($n \in \mathbf{N}$) の n 項までの和を求めよ.

練習問題 1.1.5-2 次式を計算せよ.

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i \right)$$

この辺の Σ 計算や Π 計算は後で頻繁に出ますから, ここでしっかり, 計算方法を覚えておきましょう



練習問題 1.1.5-3 次式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right)$$

練習問題 1.1.5-4 次式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \right) = \frac{1}{4} n(n+3)$$

練習問題 1.1.5-5 次式が成り立つことを示せ.

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2 = \prod_{i=1}^n a_i^2 \quad (a_i \neq 0: i=1, 2, \dots, n)$$

練習問題 1.1.5-6 5 個の $\square \sim \boxtimes$ にあてはまる数学記号を書け.

- 1) 直線 ℓ と直線 m が平行であることを $\ell \square m$ と書き, 直交する場合は $\ell \boxtimes m$ と書く.
- 2) $m, n \in \mathbf{Z}$ である m, n について, 大きさが $m \boxdot n$ である場合 $m/n \boxless 0$ であり, 大きさが $m \boxtimes n$ である場合は, $n/m \boxless 0$ である.

この問題はセンター試験みたいで, 懐かしくないかい?



1.1.6. ブール代数

ブール代数 (boolean algebra) という計算方法の定義があります. ジョージ・ブール (George Boole, 1815- 1864) は, イギリスの数学者・哲学者で, 今日のコンピュータ科学の分野の基礎的な理論のひとつがブール代数 (ブール論理) です. 応用例として, 論理回路などの設計があります. ブール代数における演算は基本的には論理演算で, $\vee$ (結び, join), $\wedge$ (交わり, meet), $\sim$ (否定, negative) のような記号を用います. 例えば, 集合 A の要素を a , 集合 B の要素を b とすれば, 集合 A と集合 B の和集合は, 積集合は, あるいは, 集合 A に属さない, という表式は,

$$A \cup B = \{a \in A \text{ or } b \in B\}, A \cap B = \{a \in A \text{ and } b \in B\}, \bar{A} = \{a \notin A\}$$

と書きますが, これを論理演算で表現する場合, ある命題 p, q があって, 「または, or », 「かつ, and », あるいは, 「でない, not」に対応する式は,

$$p \vee q, p \wedge q, \sim p$$

となります.

これらの表式は集合演算および論理演算を表すものであり, 1 対 1 に対応しています. その例として, 集合 A, B, C について

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

集合の包含分配法則ってことか?



1.1. 線形代数とは

なる集合演算を、命題 p, q, r で置き換えると、

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

となります。ここまでは、集合演算と論理演算の対応の基礎概念を説明しました。単なる約束です。ここからは、ブール代数へと話を進めます。

ブール代数は論理演算の記号で定義されますが、ちょっと分かりづらいので、論理演算記号「 $\vee, \wedge$ 」を「 $+, \cdot$ 」で、否定「 $\sim$ 」を補元「 $'$ 」、空集合「 ϕ 」を零元「 0 」、単位元を「 1 」、とそれぞれ置き換えます。そうすれば、代数演算らしく見えます。

ここで、ブール代数の定義を公理で示します。

定義 8 ブール代数の演算の公理



以下の公理を有する演算形式が成り立つ代数形式をブール代数と呼ぶ。

- (1) $a + b = b + a$ (交換律) (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
(3) $a + 0 = a$ (同一律) (4) $a + a = a$ (5) $a \cdot b = b \cdot a$ (交換律)
(6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (7) $a \cdot 1 = a$ (同一律) (8) $a \cdot a = a$
(9) $a \cdot a' = 0$ (補元律) (10) $a + a' = 1$ (補元律) (11) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

この公理を用いると、例えば、

$$\bullet 1' = 1' \cdot 1 \text{ (公理 7)} = 1 \cdot 1' \text{ (公理 5)} = 0 \text{ (公理 9)} \therefore 1' = 0$$

$$\bullet 0' = 0' + 0 \text{ (公理 3)} = 0 + 0' \text{ (公理 1)} = 1 \therefore 0' = 1$$



となります。

な、なんじゃ、これ! しっかり検討せねばならん.

例題 1.1.6-1 ブール代数において、次式を証明せよ。

$$a \cdot (a + b) = a$$

さて、どこから進めますか? ちょっと、解答を頭に描いてみてください。



例題 1.1.6-1 解答



$$a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b \quad (\text{公理 11})$$

$$= a + a \cdot b \quad (\text{公理 8})$$

$$= a \cdot 1 + a \cdot b \quad (\text{公理 7})$$

$$= a \cdot (1 + b) \quad (\text{公理 11})$$

$$= a \cdot (b + 1) \quad (\text{公理 1})$$

$$= a \cdot \{b + (b + b')\} \quad (\text{公理 10})$$

$$= a \cdot \{(b + b) + b'\} \quad (\text{公理 2})$$

$$= a \cdot \{b + b'\} \quad (\text{公理 4})$$

$$= a \cdot 1 \quad (\text{公理 10})$$

$$= a \quad (\text{公理 7})$$

$$\therefore a \cdot (a + b) = a$$

という証明になります。例えば、公理 (4) は、電子回路で、電圧 $5V$ と電圧 $5V$ を並列にする場合、電圧は変わらず $5V$ である、ということを表していると考えます。面白くないですか? ということで、ここでは、「ブール代数」の紹介だけにしておきましょう。

謝辞

東京工業大学の廣瀬教授（工学博士）および元海上保安庁の土出氏（理学博士）には、多大なる貴重なご意見・ご指導を頂き、ここで記して、心より感謝の意を申し申し上げます。また、本書をまとめる上で、百科事典、数学辞典はもとより、世の中に数多くある、数学専門書・教科書やインターネットに掲載されている線形代数の説明を参考にさせて頂きました。各著者に敬意を表します。

著者

今井 博（いまい ひろし）

略歴

1978 年 3 月 北海道大学理学部地球物理学科卒
1978 年 4 月 東京大学大学院理学系研究科地球物理専門課程 修士課程
1980 年 4 月 東京大学大学院理学系研究科地球物理専門課程 博士課程
1983 年 3 月 博士号取得
1998 年 3 月 技術士（応用理学）取得
2017 年 7 月 現在

土木系コンサルタント会社物理探査業務に従事
早稲田大学 空間情報学 非常勤講師
昭和薬科大学 環境科学概論 元非常勤講師
土木学会地盤工学委員会火山工学研究小委員会 委員長
エンジニアリング協会 探査技術研究会 委員長

主な著書

「読むだけでわかる数学再入門 上・下」 山海堂
「耐震技術のはなし」（一部執筆）日本実業出版
「火山とつきあう Q & A 99」（一部執筆および編集）土木学会
「火山工学入門」（一部執筆および編集）土木学会
「火山工学入門 応用編」（編集）土木学会
「時空間情報学」共著 インデックス出版
「読むだけでわかる数学再入門 線形代数編」準備中 インデックス出版

よ 読むだけでわかる数学再入門—線形代数編

2019 年 10 月 1 日 第 1 刷発行

著 者 今井 博

発行者 田中壽美

発行所 インデックス出版

mail : info@index-press.co.jp

〒191-0032 東京都日野市三沢 1-34-15

TEL (042)595-9102

FAX (042)595-9103