

読むだけでわかる
数学再入門

微分・積分 編

今井 博 著

はじめに

微分？、積分？、それって？ 昔習ったという記憶しかない、なんだっけ？ という読者、仕事や研究で微分や積分について必要になったが、どんな本で勉強したらよいかかわからない、という読者のために、また、数学の授業でどうもよく意味が分からないという理工系の学生のために、懇切丁寧に、手取り足取り？、（ただし、宅配のように、お宅まで出張しませんが…（ $\wedge \div \wedge$ ））、分かりやすく説明します。

さて、微分学や積分学は、主として、高校3年の理数系の学生が学ぶ数IIIという分野で詳しく教えられています。議論はあるでしょうけれど、大量の練習問題をやらされながらも、何のためにこんな式変形を習うのか分からないまま、単位をもらうために頑張った高校生がほとんどではないでしょうか。理学系・工学系の大学や学科に入っても、「難しいのだ！」という印象を植え付けるような数学の講義で、うんざりですよ。分かります、というか、実は、これが著者の体験です。そんな高校生や大学生、社会人に読んでもらいたいです。いろいろ、苦労したから著者は書きたいと思ったのです。

本書は、本当に読むだけで良いのです。読むだけでわかるように、書いたつもりです。かと言って、低レベルではありません。レベルは、高校生の「数IIB 数IIIC」程度から大学1年（教養の必修）で習うあたりです。当然、本書1冊で、微分学・積分学の全ての分野を詳しく取り上げることは出来ませんし、する気もありませし、数学科を出ていない著者には数学の知識や能力に限界があります。ですから、本書では、基礎的な知識を中心にやさしく説明しようと思います。

この本の目的は、理学・工学で用いる数学の微分・積分法に関する基礎の習得です（ただし、複素関数論は含みません）。本書はそのエッセンスを紹介します。もちろん、ある程度の数学を読む知識が必要になります。さらに、読んで分からない部分は調べる意欲が重要です。ここで、何故、英文字などを使うのかという疑問を持っている方に申し上げますと、それは、いろいろな数の代表を英文字で表すためです。コンピュータのプログラムは、定義部分の定数を除けば、全て英文字で代表させて書かれています。後から、必要に応じたケースごとの具体的な数字を英文字に代入すれば、プログラムで設定した方法で答えが簡単に得られます。ですから、考え方によっては、数学で、英文字を用いた数式を書くというのは、コンピュータの「サブルーチン」あるいは「関数」を書いているのと同じことなのです。

さて、一番大事なのは、最後まで読み切ることです。ここで「読む」とは、数式の流れを目で見て納得することです。例題は解答を見ないで解ける必要はありません。読むだけで理解できれば結構です。本書では、式の変形は、目で追えるように、できる限り省略しないようにしています。ふむふむと流れを追ってください。本書を読み、さらに詳しい数学へとステップアップして頂けたらと思います。計算で難しそうな場所は、キャラクターが注意点や説明不足を補ってくれます。さあ、皆さん！ 早速、スモールワールドにはいっていきましょう！



平成 25 年 10 月
著者

目 次

1. 微分 1	
1.1. 微分とは 2	1.4.3. ナブラ 43
1.1.1. 極限の定義 3	1.4.4. 極大・極小 44
1.1.2. 数列の極限 6	1.4.5. 複素数の偏微分 45
Short Rest 1. 11	Short Rest 4 46
1.2. 関数の微分の基礎 12	1.5. 全微分 47
1.2.1. 関数の極限の基礎 12	1.5.1. 全微分とは 47
1.2.2. 関数の微分の基礎 16	1.5.2. ラグランジュの公式と平均値の定理 48
Short Rest 2 17	Short Rest 5 52
1.3. 関数の微分 18	1.6. 線形代数における微分 53
1.3.1. 関数の微分 18	1.6.1. ベクトルを微分 53
1.3.2. 冪関数の微分 21	1.6.2. ベクトルで微分 54
1.3.3. 三角関数 24	1.6.3. 行列で微分 55
1.3.4. 対数関数と指数関数 27	1.6.4. 最小二乗法 57
1.3.5. オイラー公式 35	Short Rest 6 62
1.3.6. 微分公式のまとめ 38	1.7. 微分に関する捕捉 63
Short Rest 3 39	1.7.1. 微分の表現方法 63
1.4. 偏微分 40	1.7.2. 微分の別の見方 64
1.4.1. 偏微分の意味 40	Short Rest 7 65
1.4.2. 偏微分 41	演習問題 第 1 章 66
2. 積分 68	
2.1. 積分とは 69	2.3.2. 積分区間 87
2.1.1. 原始関数 69	2.3.3. 線積分 90
2.1.2. 積分の基本 69	2.3.4. 二重積分 94
2.1.3. 積分定数 70	2.3.5. デルタ関数 96
Short Rest 8 72	Short Rest 10 97
2.2. 不定積分 73	2.4. グリーン関数 98
2.2.1. 不定積分とは 73	2.4.1. グリーン関数とは 98
2.2.2. 関数の不定積分 - 1 74	2.4.2. 電磁気学での利用 99
2.2.3. 関数の不定積分 - 2 74	2.4.3. ポアソン方程式のグリーン関数 100
2.2.4. 置換積分法 77	2.4.4. 波数フーリエ変換とデルタ関数 103
2.2.5. 部分積分法 78	2.4.5. 波数領域のグリーン関数 104
Short Rest 9 80	Short Rest 11 105
2.3. 定積分 81	演習問題 第 2 章 106
2.3.1. 定積分とは 81	
3. 微分方程式 107	
3.1. 一階微分方程式 108	3.1.7. 非同次一階線形微分方程式 118
3.1.1. 一階線形微分方程式とは 108	Short Rest 12 120
3.1.2. 一階微分方程式 109	3.1.8. 定数変化法 121
3.1.3. 等傾線 109	3.1.9. 直交曲線 128
3.1.4. 一階高次微分方程式 111	3.1.10. ピカールの逐次近似法 130
3.1.5. 変数分離 112	3.1.11. リカッチの微分方程式 132
3.1.6. 同次一階線形微分方程式 117	3.1.12. ベルヌーイの微分方程式 133

3.1.13. クレローの微分方程式	134	3.3.2. ベクトルの発散・ガウスの定理	149
3.1.14. ストゥリウム・リュビル型微分方程	35	3.3.3. ベクトルの回転・ストークスの定理	152
Short Rest 13	136	3.3.4. ナブラの計算	156
3.2. 二階線形微分方程式	137	Short Rest 15	158
3.2.1. 二階線形微分方程式とは	137	3.4. 偏微分方程式	159
3.2.2. 二階線形微分方程式	137	3.4.1. 偏微分方程式とは	159
3.2.3. 特性方程式	139	3.4.2. 偏微分方程式	160
3.2.4. オイラーの微分方程式	140	3.4.3. ラグランジェ法	163
3.2.5. 他の微分方程式	144	3.4.4. シャルピー法	165
Short Rest 15	145	Short Rest 16	170
3.3. ナブラ	146	演習問題 第3章	171
3.3.1. ナブラとは	146		

4. 応用 172

4.1. 流体力学における分野	173	4.4. 力学・熱学の分野	202
4.1.1. トリチェリの法則の利用	173	4.4.1. 質量, 重心	202
4.1.2. ハーゲン・ポアズイユ流	174	4.4.2. 慣性モーメント	202
4.2. 光・弾性波における分野	175	4.4.3. 一次元熱方程式	204
4.2.1. フェルマーの最小時間の定理	175	4.4.4. 力学と波動論	207
4.2.2. 弾性波波線	177	Short Rest 19	212
4.2.3. ヘルムホルツ方程式・波動方程式	181	4.5. 幾何学の分野	213
4.2.4. 畳み込み積分	182	4.5.1. 直交曲線群	213
4.2.5. デコンボリューション	183	4.5.2. パラボラ・アンテナの問題	216
4.2.6. 自己相関関数・相互相関関数	186	4.5.3. 球の表面積や体積	218
Short Rest 17	187	4.5.4. 曲率半径	220
4.3. 電磁気学における分野	188	4.6. スペクトルとフィルター	221
4.3.1. 電磁波の基礎方程式	188	4.6.1. スペクトルの概念	221
4.3.2. 電磁波の伝播	190	4.6.2. 弦の振動	224
4.3.3. 電磁波の反射と場の直交性	194	4.6.3. フーリエ変換	228
4.3.4. 電磁波の反射と透過	196	4.6.4. FFT	230
4.3.5. 電磁波のエネルギー	197	4.6.5. フィルターオペレーション	231
4.3.6. 電磁波速度の補正	199	Short Rest 20	233
Short Rest 18	201	演習問題 第4章	234

5. 数値解析法 235

5.1. オイラー・コーシー法	236	5.3.3. 4次のルンゲ・クッタ法	241
5.2. ニュートン法	237	5.4. FEM と BEM	242
Short Rest 21	238	5.5. カルマン・フィルター	242
5.3. ルンゲ・クッタ法	239	Short Rest 22	243
5.3.1. 2次のルンゲ・クッタ法	239	演習問題 第5章	244
5.3.2. 3次のルンゲ・クッタ法	240		

ここで、本書でコメントなど話を進める上で登場してくれるいろいろなキャラクターを紹介したいと思います。皆さん、仲良くしてください。



本書の著者、 博

整理整頓を呼びかけるサトシ君



アイデアやヒントを指摘するかし子さん

アイデアやヒントを指摘するかしお君



グラフを紹介するすしき君



分析結果を紹介するためし君



例題を紹介するレイ子さん

例題を解答するカイト君



内容の重要な部分を指示するめもる君

著者のアシスタントのたすく君



著者のアシスタントのめぐみさん

厄介なことを引き受けるまかし君



さあ、心の準備はできたでしょうか。それでは、微分・積分の世界を、楽しくサーフィンしましょう。Let's get started !

1. 微分

微分

分かっているつもりでも分からないのが最も基本的なことです。

まず、「微分」とは何でしょう、 $f(x) = x^2$ を x で微分すれば、皆さんよくご存知のように、答えは即答で $2x$ だとも言えますよね。でも、何故 $2x$ なのですか？「微分」という処理を x^2 に施すと $2x$ になるということを高校数学で覚えたことでしょうか。それは、 $h \neq 0$ として、

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

のように、「微分する」と言うことは、上式に示す微分の定義式を用いて計算することだったでしょう。近い過去か、遠い過去か、わかりませんが、思い出しましたでしょうか。

しかし、この式に何の意味があるのでしょうか。どうしてこの式を使用することが、なぜ「微分」なのでしょう。そもそも微分とはどういうことでしょうか。

さあ、始めましょう。



1.1. 微分とは

1.1. 微分とは

本書では、微分 (differentiation) のことから始めます。さて、微分って、何でしょう？「微・分」ですから、微小な部分に分けるという意味なのでしょうか。微小な部分に分ける、と言うならば、どの程度微小なのでしょう？

「微」とは、広辞苑で、ごく小さいこと、とあり、文学的ですが、「忽 (こつ)」は十万分の1で「微」はその10分の1、すなわち、百万分の1とあります。すなわち、「微」はマイクロ、 10^{-6} のことです。

ここまできたら、日本の数の単位について、大数と小数について書かざるを得ませんね。一般的には、1以上を大数、1未満を小数と呼び、

大数：一 10^0 、十 10^1 、百 10^2 、千 10^3 、万 10^4 、億 10^8 、兆 10^{12} 、京 10^{16} 、垓 10^{20} 、杼 10^{24} 、穰 10^{28} 、溝 10^{32} 、澗 10^{36} 、正 10^{40} 、載 10^{44} 、極 10^{48} 、恒河沙 10^{52} 、阿僧祇 10^{58} 、那由他 10^{60} 、不可思議 10^{64} 、無量大数 10^{68} (計 21 単位)

小数：分 10^{-1} 、厘 10^{-2} 、毛 10^{-3} 、糸 10^{-4} 、忽 10^{-5} 、微 10^{-6} 、纖 10^{-7} 、沙 10^{-8} 、塵 10^{-9} 、埃 10^{-10} 、渺 10^{-11} 、漠 10^{-12} 、模糊 10^{-13} 、逡巡 10^{-14} 、須臾 10^{-15} 、瞬息 10^{-16} 、彈指 10^{-17} 、刹那 10^{-18} 、六德 10^{-19} 、虚空 10^{-20} 、清淨 10^{-21} 、阿頼耶 10^{-22} 、阿摩羅 10^{-23} 、涅槃寂靜 10^{-24} (計 24 単位)

となっていますが、時代や地域により解釈が異なり、国によって異なる場合があります。読み方は、調べてみてください。

こんな数表記は今まで見たこと無かったな~



さあ、そろそろ本題に入っていきます。数学は決め事の上に成り立っているのです。その決め事を「公理 (axioms)」と呼び、公理の上で定義が、また、公理や定義から公式や定理などが作成されていきます。

さて、「微分」の定義です。定義とは、こうしてする式変形を「微分」である、という決め事です。決め事、すなわち、定義にしたがって、話を進めざるを得ません。そこで、現在定義されている微分の方法を説明していきます。しかし、将来も同じ定義かは保証できません。例えば、通常の線形代数の定義と異なる決め事で体系化されている場合を挙げることができます。ブール代数 (boolean algebra) です。ブール代数では、公理が、 $a + a = a$ だったり、 $aa = a$ だったりなどの演算で定義 (公理化) されており、例として、電気回路の設計で使用されています。興味のある方は、調べてみてください。

ちょっと、横道に逸れました。ここで言いたいのは、「数学」は公理などの決め事で体系化され、定義を基盤とし、その上に、定理や公式が構築されている、ということです。

まあ、ぼちぼち進めましょう。

ブール代数ってなんだか変な名前だけど、G.Boole というイギリスの数学者の名前なんだ。コンピュータ言語で真 (true) と偽 (false) あらわす boolean 型でも名前が出てきますね。また、電気回路の設計で論理回路を設計しますが、そこでもブール代数が大活躍です。



1.1.1. 極限の定義

微分も積分も、極意は、まさに極限(*limit*)です。文字通り、非常に小さく分割するという話です。高校時代、極限と言えば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = A$$

などの表現で習ったでしょう。お～、なんと懐かしいことでしょう！ なんてね。

これは、自然数 n を限りなく大きくするとき、数列 α_n が限りなく A に近づくことを意味するための表現方法です (lim は limit の頭3文字)。例えば、自然数 n について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(1.1.1-1)

と書きます。「これは本当に正しいでしょうか？」と言う質問が解析学で最初に出てくる定番です。式を眺めていると、0 には近づくが 0 にはならないように見えませんか？ 図 1.1.1-1 は $y = 1/x$ のうち、 $1 \leq x \leq 50$ の部分を描いたグラフです。0 には近づきますが、いったいどこまで近づくのでしょうか。「鉄道の線路の話」のようですね。つまり、線路は曲がらず平行線となっていてと仮定します。人がその真ん中に立って遠くを見ると、線路は交差はしないが、一点に収束しているように見えます。これは、一点で交わっているとしても極限の考え方からすれば正しいのです。それが、美術や工学で使う一点投射法です。

さて、大学生の教科書として指定されている難しい数学の教科書では、有界だの、有名な「 ε - δ 法」と言うややこしい論法を用いた極限の定義がなされます。理工系大学の教養の数学の講義で習った読者がいらっしやるかもしれません。数列が収束する、すなわち、「決まった値に近づく」とは、いったい、数学ではどのように定義されているのでしょうか？ 数学専門書によれば、「収束 (convergence)」の定義は、

定義 1. 収束

数列 a_n について、どんなに小さな正の数 ε を任意に選んでも、それに対する適当な大きな N を選んで、

$$n > N \text{ ならば } |a_n - A| < \varepsilon$$

となるようにすることが出来る n が存在するとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

と書き、数列 a_n は A に収束する、という。

何じゃこれ！



と書かれています。専門的過ぎて咄嗟には理解できませんよね。なんのこっちゃって、感じませんか？ このような方法は数学の極限を規定する公理のような表現方法で、実は、理学部学や工学部では何の足しにもなりません。分かるでしょ。数学科にだけ、そして、数学の世界にだけ生きている方法、と著者は言いたいのです。

例を以下の参考 1.1.1-1 および参考 1.1.1-2 に示します。

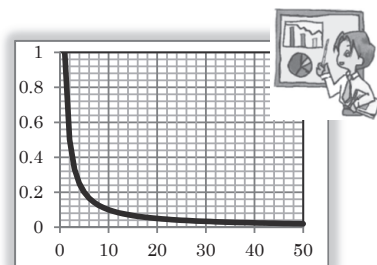


図 1.1.1-1 $y = 1/x$ ($x > 0$) のグラフ

1.1. 微分とは

参考 1.1.1-1

n を自然数 ($n > 0$ である整数) とするとき、正の数 ε について

自然数 N を $N > \varepsilon^{-1}$ となるようにするとき、

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \left(n > N; \quad N > \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

よ〜く考えてみてね!

ε は 0 ではなく、正の数でマイナスにならない非常に小さな有理数だから、 $1/\varepsilon$ はかなり大きいのだよ。



であり、任意に ε に選ぶとき、 $n > N$ なる n について、以下である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

また、ん?! って感じですよ。はじめから、答えが分かっているようで、腑に落ちません、よね。とは言いつつも、説明を続けると、上記で、 ε は任意の正数ですから、どんな小さな正数 (正の実数) でも良く、ゆえに、 N は際限なく大きな数になります。このとき、 n^{-1} と 0 が限りなく近づく、という意味です。数列 $\{a_n\}$ が、ある値 α について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (1.1.1-2)$$

となる場合、数列 $\{a_n\}$ は「収束 (convergence)」すると言います。これに対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \text{ あるいは } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (1.1.1-3)$$

となる場合、数列 $\{a_n\}$ は「発散 (divergence)」すると言います。すなわち、数列 $\{a_n\}$ の絶対値がある一定値に収束しないで、限りなく大きくなることを意味します。さあ、このことを参考 1.1.1-1 に習って考えると参考 1.1.1-2 のようになります。発散の定義は、

定義 2. 発散

数列 a_n について、どんなに大きな正の数 M を選んでも、適当な大きな自然数 N を選んで、 n が、

$$n > N \quad \text{ならば} \quad |a_n| > M$$

となるようにすることができるとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$$

と書き、数列 a_n は発散する、という。



です。ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ はプラス無限大に発散する、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ はマイナス無限大に発散するといえます。 $y = 1/x$ はその例です。すなわち、 $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = +\infty$ 、あるいは、 $\lim_{x \rightarrow -0} 1/x = -\infty$ のように、すなわち、プラス側、あるいは、マイナス側から 0 に近づく場合、

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-1} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} x^{-1} = -\infty \quad (1.1.1-4)$$

と書きます。すなわち、上記のように、ある値に近づく方向によって、発散の仕方が異なります。階段関数も近づく方向で収束の仕方が違います。上記例では、 $y = 1/x$ は $x = 0$ で連続 (continuous) でない、または、 $x = 0$ で不連続 (discontinuous) である、と言います。

では、 x^n の極限を求める方法を参考 1.1.1-2 に示します。実は、二項定理を用いるだけです。ここで、 $x = 0$ の場合は常に $x^n = 0$ は自明であり、もし、 $x < 0$ であれば、 n が奇数の場合と偶数の場合で場合分けをすれば良いので、ここでは、 $x > 0$ について考えます。

まあ、ご存じでしょうけれど、我慢して、読んでください。二項定理をご存じない読者はご自身で調べてください。

参考 1.1.1-2

(1) $x > 1$ の場合, $x = 1 + \delta$ ($\delta > 0$) とおけば, 二項定理により, 明らかに,

$$x^n = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!} \delta^2 + \cdots + \delta^n}_{>0} \geq 1 + n\delta \quad (1.1.1-5)$$

二項定理を覚えて
いますか?



です. ここで, 任意の大きな整数 M に対して, 自然数 N を

$$N > \frac{M-1}{\delta} \quad \therefore N\delta + 1 > M$$

となるようにすれば, $n > N$ である n に対して, $x^n \geq 1 + n\delta > 1 + N\delta > M$ となり, したがって,

$$x > 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$$

である.

(2) $x = 1$ の場合 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$ は自明.

(3) $0 < x < 1$ の場合, $y = 1/x$ と置けば, $y > 1$ となり, 本例 (1) と同じ扱いができる. すなわち, 任意に大きな正の数 M について, 自然数 N を適当に選ぶとき,

$$n > N \text{ ならば } y^n > M$$

となるような n を与えることができる. $M = 1/\varepsilon$ となる正の数 ε に対して, 自然数 N を適当に選ぶとき,

$$n > N \text{ ならば } y^n > 1/\varepsilon \quad (x^n = 1/y^n < \varepsilon)$$

となる n を与えることができる. ここで,

$$n > N \text{ ならば, } |x^n - 0| = x^n = 1/y^n < \varepsilon$$

となる. したがって,

$$0 < x < 1 \text{ の場合, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

である.

では, まとめておきましょう.

まとめ $x > 0$ なる実数 x について,

$$1 \quad 0 < x < 1 \text{ の場合} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (1.1.1-6)$$

$$2. \quad x = 1 \text{ の場合} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \quad (1.1.1-7)$$

$$3. \quad 1 < x \text{ の場合} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty \quad (1.1.1-8)$$

となります. 内容は分かっているても, 数学としての説明となると面倒である場合があります. まあ, 結果は読者は十分ご存知でしょうけれど..., いかがでしたか? 「証明」の難しさは, 証明の醍醐味でもあります. 頑張ってください.

まとめておこう!

