第 1 章

種々の関数

1.1 関　　数

2 つの変数 x，y の間にある関係があって，x を決めたときそれに応じて y が決まるとき，y は x の関数であるといいます．このうち，x のように値を変化させる変数を独立変数とよび，独立変数の変化に応じて値の決まる変数を従属変数とよんでいます．たとえば高さ 1 の三角形の面積 y は底辺の長さ x に応じて決まるため，y は x の関数になっています．この場合，x と y の関係は

$$y = \frac{1}{2}x \tag{1.1.1}$$

という式で表せます．数学で関数といった場合には，必ずしも式で表される必要はないのですが，本書では式で表される関数のみを考察の対象とします．

y が x の関数である場合に，

$$y = f(x) \tag{1.1.2}$$

と記します．ここで，f という文字は本質ではなく，何であっても同じです．慣れないうちは少し奇異に感じられるかもしれませんが，式 (1.1.2) を

$$y = y(x) \tag{1.1.3}$$

と書くこともあります．これは式 (1.1.2) と同じ意味をもっています．変数 x がある特定の値 a をとったとき y も特定の値になりますが．この特定の値を $f(a)$ と記します．

例題 1.1.1　$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ のとき，$f(1/2)$，$f(1-2a)$ を求めなさい．
［解］

$$f(1/2)=(1/2)\sqrt{1-(1/2)^2}=(1/2)\sqrt{3/4}=\sqrt{3}/4$$

$$\begin{aligned} f(1-2a)=&(1-2a)\sqrt{1-(1-2a)^2}=(1-2a)\sqrt{4a-4a^2} \\ =&2(1-2a)\sqrt{a-a^2} \end{aligned}$$

関数 $y=f(x)$ を視覚的に見るには，座標平面を用意して，いろいろな x に対して $f(x)$ を計算し，$(x,\ f(x))$ を座標平面上にプロットします．このような図を関数 $y=f(x)$ のグラフといいます．もちろん，x が密にあるほど正確にグラフが描けます．図 **1.1.1**（a）は式（1.1.1）のグラフですが．この場合は，少数の点をプロットするだけでそれらの点が直線上にあることがわかります．

次に例題 1.1.1 でとりあげた関数のグラフを描くことを考えてみます．この場合は，根号内は負にはなれないということに注意する必要があります．したがって，x は

$$1-x^2 \geqq 0 \quad より \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

の範囲の値をとります．このように関数によっては x の範囲に制限がつくことがあり，この x の範囲を関数 $y=f(x)$ の**定義域**といいます．さらに，x が

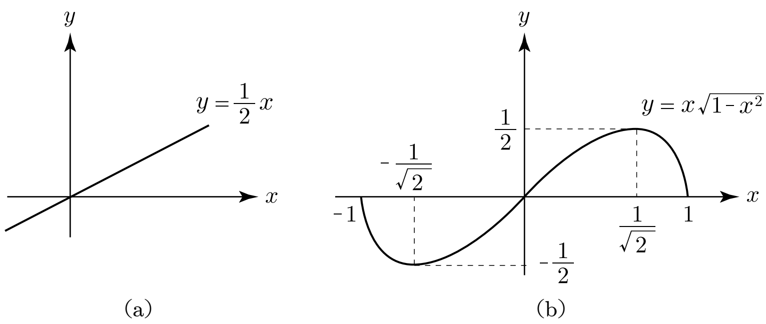


図 **1.1.1**

定義域内を変化した場合の y のとり得る範囲を**値域**といいます．図 **1.1.1**（b）にこの関数のグラフを示しますが，図からもわかるように値域は

$$-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$$

になります．一方，式（1.1.1）の定義域と値域はすべての実数です．

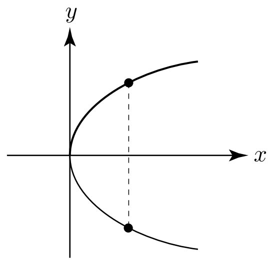


図 **1.1.2**

ある関数を図に描いたとき，図 **1.1.2** のようになったとします．この例は 1 つの x に対して複数の y の値が対応するところが今までの例と異なっています．このような関数をまとめて**多価関数**とよんでいます．そして，図のように 2 つの点が対応するような関数を 2 価関数というように，対応する点の数をつけてよぶこともあります．

関数 $y = f(x)$ は x と y の間の対応関係を与えるため，図 **1.1.3** に示すように y を与えて x を決める関係とみなすことも可能です．その場合，独立変数は座標の横軸にとることが多いため，図 1.1.3 を図 **1.1.4** のように描き直します．ただし，図 1.1.3 の関数と図 1.1.4 の関数は描き方を変えただけなので同

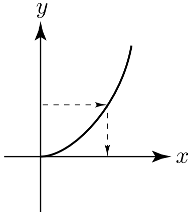


図 **1.1.3**

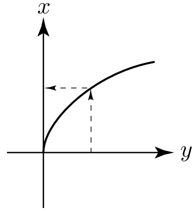


図 **1.1.4**

じ関数になります．図 1.1.4 を描くには，式(1.1.2) を x について解いたあと，y を与えて x を計算します．たとえば，式(1.1.1) の場合は $x = 2y$ に対して y を与えて x を計算して，点(y, x) をプロットします．

さて，横軸は x 軸にとることが多いので，図 1.1.4 に対して図 **1.1.5** のように座標軸の名前をつけかえてみます．この場合は名前のつけかえ（あるいは同じことですが x と y の入れ換え）という操作を行ったため，別の関数になっています．この関数をもとの関数の**逆関数**といいます．逆関数はもとの関数と密接に関係しており，通常は

$$y = f^{-1}(x) \tag{1.1.4}$$

という記号で表します．式(1.1.2) が与えられたとき，式(1.1.4) の関数を明示するには上述のように式(1.1.2) を x について解いた上で x と y を入れ換えます．したがって，式(1.1.1) の逆関数は $y = 2x$ になります．一方，図で考えると，x と y を入れ換えるという操作は，図 **1.1.6** に示すようにもとの関数上の点を $y = x$ という直線に関して対称の位置に対応させるという操作になっています．このことは，もとの関数のグラフがあった場合に逆関数のグラフを描くには $y = x$ に関して折り返せばよいことを示しています．

逆関数の性質として，上述の $y = x$ に関する対称性のほかに，

$$x = f(f^{-1}(x)) \tag{1.1.5}$$

$$x = f^{-1}(f(x)) \tag{1.1.6}$$

があります．

また $F(x) = f^{-1}(x)$ とおけば $f(x) = F^{-1}(x)$ になります．すなわち，逆

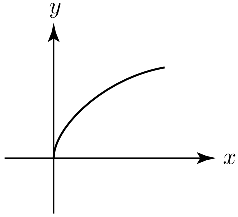


図 **1.1.5**

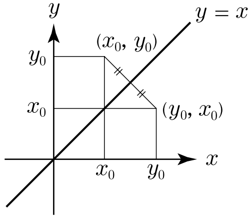


図 **1.1.6**

関数の逆関数はもとの関数になります．このことは $f(x)$ を $y = x$ に関して折り返したものが $F(x)$ であるため，$F(x)$ をもう一度 $y = x$ に関して折り返すと，もとの $f(x)$（$= F^{-1}(x)$）に戻ることからわかります．

関数 $f(x)$ に対して

$$f(x) = f(-x)$$

が成り立つとき $f(x)$ は偶関数であるといいます．たとえば，$f(x) = x^2$ は偶関数です．一方，

$$f(-x) = -f(x)$$

となる場合を奇関数といいます．たとえば，$f(x) = x/2$ や $f(x) = x^3$ は奇関数です．図 **1.1.7** に示すように偶関数は y 軸に関して対称であり，奇関数は原点に関して対称になります．

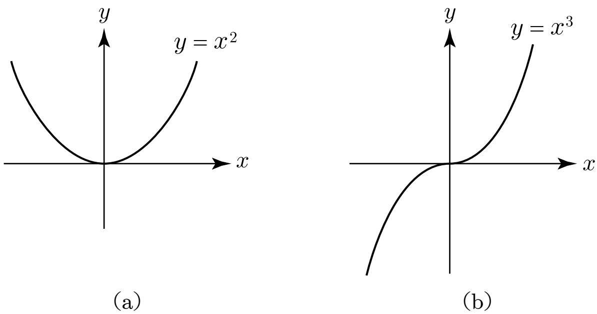


図 **1.1.7**

例題 1.1.2　任意の関数 $f(x)$ に対して，$g(x) = \{f(x) + f(-x)\}/2$ は偶関数であり，$h(x) = \{f(x) - f(-x)\}/2$ は奇関数であることを示しなさい．

［解］　$g(-x) = \{f(-x) + f(x)\}/2 = g(x)$

$$h(-x) = \{f(-x) - f(x)\}/2 = -(f(x) - f(-x))/2 = -h(x)$$

より，$g(x)$ は偶関数，$h(x)$ は奇関数になります．

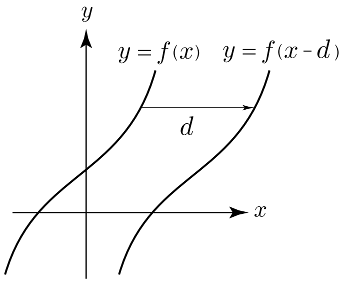


図 **1.1.8**

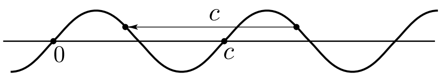


図 **1.1.9**

関数 $f(x)$ に対して，ある定数 c が存在して，任意の x について

$$f(x)=f(x+c) \tag{1.1.7}$$

が成り立つとき，$f(x)$ は周期 c の**周期関数**といいます．$y=f(x-d)$ は $d>0$ のとき図 **1.1.8** に示すように $y=f(x)$ を d だけ右に平行移動した関数になります. なぜなら, $f(x-d)$ の $x+d$ における値が $f(x)$ になるからです. $f(x-(-c))=f(x+c)$ であるため，$c>0$ のとき式(1.1.7) は，$f(x)$ を右に $(-c)$（すなわち，左に c）だけ平行移動した関数ともとの関数 $f(x)$ が一致することを示しており，図 **1.1.9** に示すように周期 c で同じ形になることを意味しています.

《補　足》 座標軸の移動

a と b を定数として, 関数

$$y=f(x-a)+b \tag{1.1.8}$$

を考えてみます．この式は $X=x-a$，$Y=y-b$ とおけば $Y=f(X)$ となります．このとき xy 面の原点（0, 0）が XY 面の点 $(-a,\ -b)$ に対応するため, XY 面と xy 面の対応は図 **1.1.10** に示すようになっています．そこで式(1.1.8) のグラフを xy 面で描くには, まず XY 面で $Y=f(X)$ のグラフを描いたあと, xy 面の座標軸を, XY 平面の座標軸と平行に, その原点が XY 面の点 $(-a,\ -b)$ になるように書き込めばよいことになります.

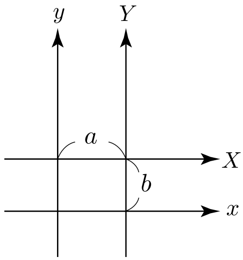


図 **1.1.10**

1.2　簡単な関数

もっとも簡単な関数に **1 次関数**

$$y = ax + b \tag{1.2.1}$$

があります．ここで a と b は定数で，a が傾き（正ならば右上がり，負ならば右下がり），b は y 軸との交点を表します（図 **1.2.1**）．

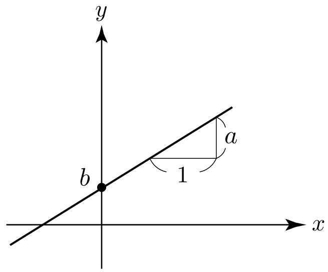


図 **1.2.1**

次に **2 次関数**

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{1.2.2}$$

をとりあげます．式(1.2.2）は

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

と変形できます．そこでグラフを描くには，前節の補足で述べたように，まず仮想的に XY 面を考え $Y = aX^2$ のグラフを描いたあと，xy 面の座標軸を XY 面の点($b/2a$, $-c + b^2/4a$）が原点になるように書き込みます．なお，$Y = aX^2$ のグラフは a の正負によって図 **1.2.2** に示すような下に凸か上に凸の形（いずれも**放物線**とよばれます）になります．もちろん式(1.2.2）の頂点の座標が xy 面において（$-b/2a$, $c - b^2/4a$）であることを用いて図を描くこともできます．すなわち $y = ax^2$ の形のグラフを，その頂点が($-b/2a$, $c - b^2/4a$）になるように描きます．

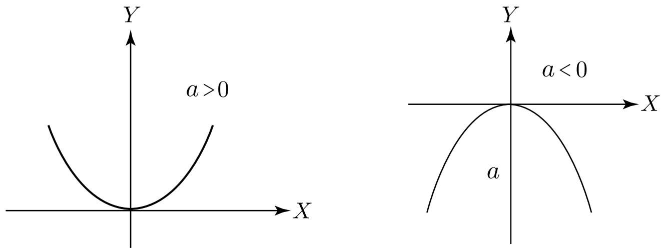


図 **1.2.2**

3 次以上の高次関数をグラフに書くと，いくつかの凹凸をもった形になります．一般に n 次関数は $n-1$ 個以下の凹凸をもつことが 2 章の微分法を用いればわかります．なお，図 **1.2.3** には **3** 次関数と **4** 次関数のグラフの例を示しています．

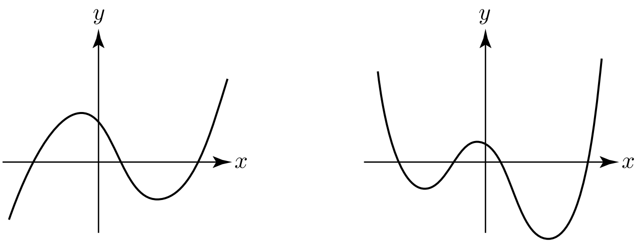


図 **1.2.3**

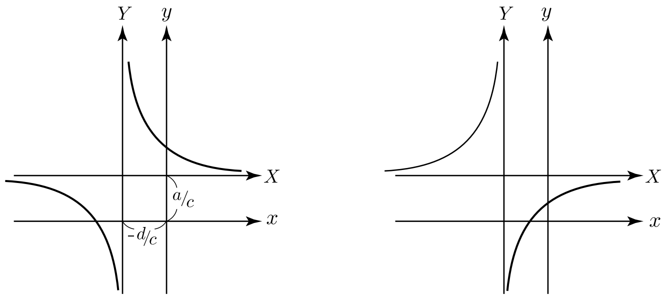
1 次式の割り算の形をした関数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc\neq 0) \tag{1.2.3}$$

もよく現れます．ここで，もし $ad-bc=0$ ならば式（1.2.3）は約分できて定数になるため，$ad-bc\neq 0$ というただし書きをつけています．式（1.2.3）は

$$y=\frac{(bc-ad)/c^2}{x+(d/c)}+\frac{a}{c}$$

と変形できるため, $Y=A/X(A=(bc-ad)/c^2)$ という関数が基本になります. これは, 図 **1.2.4** に示すような形をしており, $X\to\pm\infty$ のとき X 軸（$Y=0$）に,



（$A > 0$，$d/c < 0$，$a/c > 0$）　（$A < 0$，$d/c < 0$，$a/c > 0$）

図 **1.2.4**

$X \to \pm 0$ のとき Y 軸（$X = 0$）に限りなく近づきます（このような直線を漸近線といいます）．このことは xy 面では $x = -d/c$，$y = a/c$ という漸近線をもつことを示しています．

分子が 2 次式，分母が 1 次式であるような関数の場合には

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{a}{d}x + \frac{(b - ae/d)x + c}{dx + e}$$

のように分解し, 1 次式と式(1.2.3)の和と考えます．グラフの概形を描くには, 2 つのグラフを別々に描いて足し合わせます．図 **1.2.5** に一例として

$$y = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{x + 1}$$

のグラフを示しています．

一般に $p(x)$ と $q(x)$ が多項式の場合に

$$y = p(x)/q(x) \tag{1.2.4}$$

という形の関数を**有理関数**とよんでいます．

最後に**無理関数**の一例である

$$y = \sqrt{x} \tag{1.2.5}$$

を考えます．根号内は負にはなれないので定義域は $x \geqq 0$ です．また，右辺は負ではないため，値域も $y \geqq 0$ です．この関数は $y = x^2$ の逆関数のひとつ

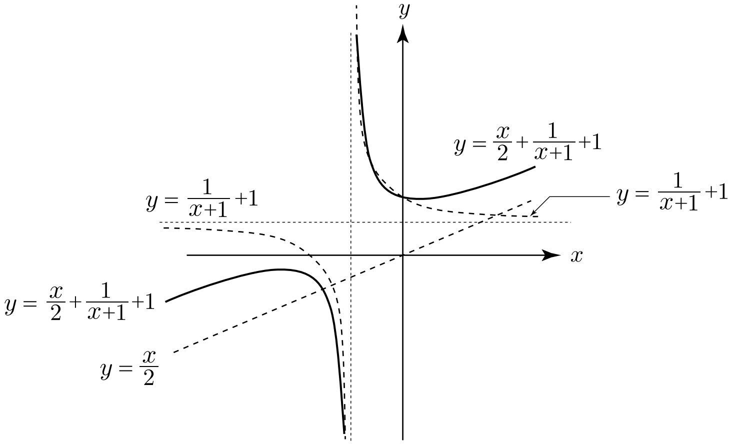


図 **1.2.5**

（もうひとつは $y=-\sqrt{x}$ ）であるため，グラフは $y=x^2$ の $x>0$ の部分を $y=x$ に関して折り返したものになります．なお，$y=x^2$ の $x<0$ の部分を $y=x$ に関して折り返したものは関数 $y=-\sqrt{x}$ です．