第 1 章

種々の関数

1.1　関　　数

2 つの変数 x，y が関係づけられており，x を決めたときそれに応じて y が決まるとき，y は x の関数であるといいます．このうち，x のように値を変化させる変数を独立変数とよび，独立変数の変化に応じて値の決まる変数を従属変数とよんでいます．たとえば高さ 1 の三角形の面積 y は底辺の長さ x に応じて決まるため，y は x の関数になっています．この場合，x と y の関係は

$$y = \frac{1}{2}x \tag{1.1.1}$$

という式で表せます．数学で関数といった場合には，必ずしも式で表される必要はないのですが，本書では式で表される関数のみを考察の対象とします．

y が x の関数である場合に，

$$y = f(x) \tag{1.1.2}$$

と記します．ここで，f という文字は本質ではなく，何であっても同じです．慣れないうちは少し奇異に感じられるかもしれませんが，式 (1.1.2) を

$$y = y(x) \tag{1.1.3}$$

と書くこともあります．これは式 (1.1.2) と同じ意味をもっています．変数 x がある特定の値 a をとったとき y も特定の値になりますが．この特定の値を $f(a)$ と記します．

例題 1.1.1　$f(x)$ $=x\sqrt{1-x^2}$ のとき，$f(1/2)$，$f(1-2a)$ を求めなさい．
［解］

$$f(1/2) = (1/2)\sqrt{1-(1/2)^2} = (1/2)\sqrt{3/4} = \sqrt{3}/4$$

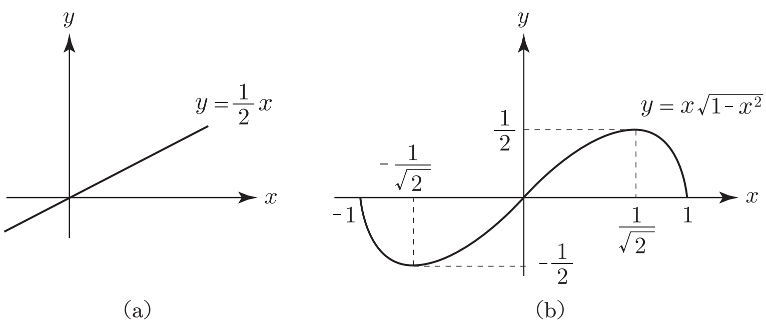
$$\begin{aligned} f(1-2a) &= (1-2a)\sqrt{1-(1-2a)^2} = (1-2a)\sqrt{4a-4a^2} \\ &= 2(1-2a)\sqrt{a-a^2} \end{aligned}$$

関数 $y=f(x)$ を視覚化するには，座標平面を用意して，いろいろな x に対して $f(x)$ を計算し，$(x,\ f(x))$ を座標平面上にプロットします．このような図を関数 $y=f(x)$ のグラフといいます．もちろん，x が密にあるほど正確にグラフが描けます．図 **1.1.1**(a) は式(1.1.1) のグラフですが，この場合は，少数の点をプロットするだけでそれらの点が直線上にあることがわかります．

次に例題 1.1.1 でとりあげた関数のグラフを描くことを考えてみます．この場合は，根号内は負にはなれないということに注意する必要があります．したがって，x は

$$1-x^2 \geqq 0 \quad \text{より} \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

の範囲の値をとります．このように関数によっては x の範囲に制限がつくことがあり，この x の範囲を関数 $y=f(x)$ の**定義域**といいます．さらに，x が定義域内を変化した場合の y のとり得る範囲を**値域**といいます．図 **1.1.1**(b)



(a)　(b)

図 **1.1.1**

にこの関数のグラフを示しますが，図からもわかるように値域は

$$-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}$$

になります．一方，式(1.1.1)の定義域と値域はすべての実数です．

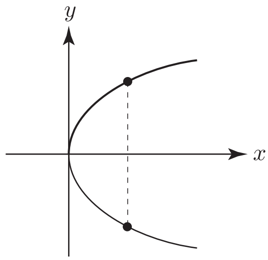


図 1.1.2

ある関数を図に描いたとき，図 **1.1.2** のようになったとします．この例は 1 つの x に対して複数の y の値が対応するところが今までの例と異なっています．このような関数をまとめて多価関数とよんでいます．そして，図のように 2 つの点が対応するような関数を 2 価関数というように，対応する点の数をつけてよぶこともあります．

関数 $y = f(x)$ は x と y の間の対応関係を与えるため，図 **1.1.3** に示すように y を与えて x を決める関係とみなすことも可能です．その場合，独立変数は座標の横軸にとることが多いため，図 1.1.3 を図 **1.1.4** のように描き直します．ただし，図 1.1.3 の関数と図 1.1.4 の関数は描き方を変えただけなので同じ関数になります．図 1.1.4 を描くには，式(1.1.2)を x について解いたあと，

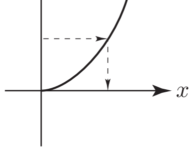


図 1.1.3

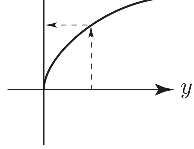


図 1.1.4

y を与えて x を計算します．たとえば，式(1.1.1) の場合は $x = 2y$ に対して y を与えて x を計算して，点(y, x) をプロットします．

さて，横軸は x 軸にとることが多いので，図 1.1.4 に対して図 **1.1.5** のように座標軸の名前をつけかえてみます．この場合は名前のつけかえ（あるいは同じことですが x と y の入れ換え）という操作を行ったため，別の関数になっています．この関数をもとの関数の**逆関数**といいます*．逆関数はもとの関数と密接に関係しており，通常は

$$y = f^{-1}(x) \tag{1.1.4}$$

という記号で表します．式(1.1.2) が与えられたとき，式(1.1.4) の関数を明示するには上述のように式(1.1.2) を x について解いた上で x と y を入れ換えます．したがって，式(1.1.1) の逆関数は $y = 2x$ になります．一方，図で考えると，x と y を入れ換えるという操作，すなわち，任意の（x_0, y_0）を（y_0, x_0）に変える操作は，図 **1.1.6** に示すようにもとの関数上の点を $y = x$ という直線に関して対称の位置に対応させるという操作になっています．このことは，もとの関数のグラフがあった場合に逆関数のグラフを描くには $y = x$ に関して折り返せばよいことを示しています．

逆関数の性質として，上述の $y = x$ に関する対称性のほかに，

$$x = f(f^{-1}(x)) \tag{1.1.5}$$

$$x = f^{-1}(f(x)) \tag{1.1.6}$$

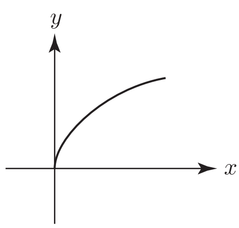


図 **1.1.5**

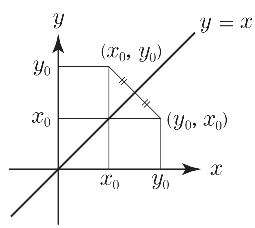


図 **1.1.6**

*　本によっては x と y の入れ換えを行う前の関数，すなわち $y = f(x)$ を x について解いた関数を逆関数と定義しているものもあります．

があります．このことは

$y = f(x)$ ならば　$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$

$y = f^{-1}(x)$ ならば　$x = f(y) = f(f^{-1}(x))$

から明らかです．

　また $F(x) = f^{-1}(x)$ とおけば $f(x) = F^{-1}(x)$ になります．すなわち，逆関数の逆関数はもとの関数になります．このことは $f(x)$ を $y = x$ に関して折り返したものが $F(x)$ であるため，$F(x)$ をもう一度 $y = x$ に関して折り返すと，もとの $f(x)$（$= F^{-1}(x)$）に戻ることからもわかります．

＜特殊な関数＞

　関数 $f(x)$ に対して

$$f(x) = f(-x)$$

が成り立つとき $f(x)$ は偶関数であるといいます．たとえば，$f(x) = x^2$ は偶関数です．一方，

$$f(-x) = -f(x)$$

となる場合を奇関数といいます．たとえば，$f(x) = x/2$ や $f(x) = x^3$ は奇関数です．図 **1.1.7** に示すように偶関数は y 軸に関して対称であり，奇関数は原点に関して対称になります．

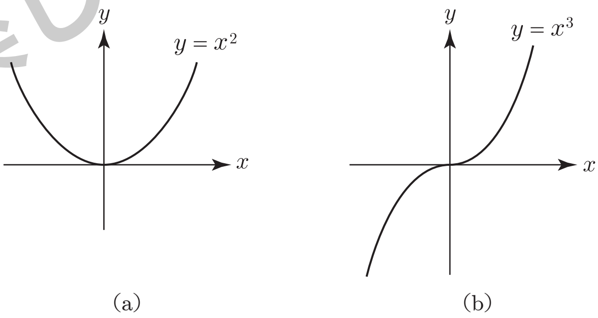


図 **1.1.7**

例題 1.1.2　任意の関数 $f(x)$ に対して，$g(x) = \{f(x) + f(-x)\}/2$ は偶関数であり，$h(x) = \{f(x) - f(-x)\}/2$ は奇関数であることを示しなさい．

［解］　$g(-x) = \{f(-x) + f(x)\}/2 = g(x)$

$h(-x) = \{f(-x) - f(x)\}/2 = -(f(x) - f(-x))/2 = -h(x)$

より，$g(x)$ は偶関数，$h(x)$ は奇関数になります．

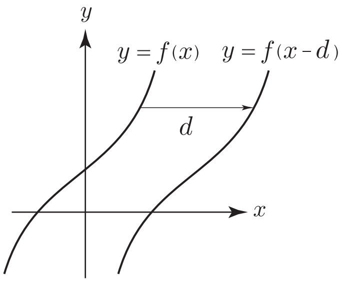


図 **1.1.8**

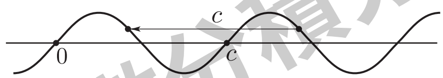


図 **1.1.9**

関数 $f(x)$ に対して，ある定数 c が存在して，任意の x について

$$f(x) = f(x + c) \tag{1.1.7}$$

が成り立つとき，$f(x)$ は周期 c の周期関数といいます．一般に $y = f(x - d)$ は $d > 0$ のとき図 **1.1.8** に示すように $y = f(x)$ を d だけ右に平行移動した関数になります．なぜなら，$f(x - d)$ の $x + d$ における値が $f(x)$ になるからです．$f(x - (-c)) = f(x + c)$ であるため，$c > 0$ のとき式(1.1.7) は，$f(x)$ を右に（$-c$）（すなわち，左に c）だけ平行移動した関数ともとの関数 $f(x)$ が一致することを示しており，図 **1.1.9** に示すように周期 c で同じ形になることを意味しています．

《補　足》 座標軸の移動

a と b を定数として, 関数

$$y = f(x-a) + b \tag{1.1.8}$$

を考えてみます．この式は $X = x - a$，$Y = y - b$ とおけば $Y = f(X)$ となります．このとき xy 面の原点（0, 0）が XY 面の点（$-a$, $-b$）に対応するため, XY 面と xy 面の対応は図 **1.1.10** に示すようになっています．そこで式（1.1.8）のグラフを xy 面で描くには, まず XY 面で $Y = f(X)$ のグラフを描いたあと, xy 面の座標軸を，XY 平面の座標軸と平行に，その原点が XY 面の点（$-a$, $-b$）になるように書き込めばよいことになります．もちろん $y = f(x)$ を右に a, 上に b 移動させても同じです.

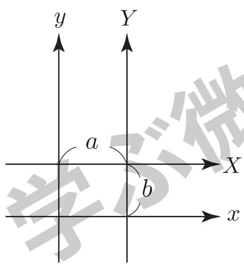


図 **1.1.10**

《補　足》 関数のグラフ

$y = f(x)$ のグラフが与えられているとき以下のグラフは（　）内の意味でもっています.

① $y = f(-x)$ （y 軸に関して折り返したグラフ）
② $y = -f(x)$ （x 軸に関して折り返したグラフ）
③ $y = -f(-x)$ （x 軸と y 軸に関して折り返したグラフ）
④ $y = f(x-a) + b$ （右に a，上に b 移動させたグラフ）
⑤ $y = f^{-1}(x)$ （$y = x$ に関して折り返したグラフ）

③については原点に関して 180° 回軸したグラフともいえます.