

第 1 章

飽和土の透水

1.1 ダルシーの法則

土の透水性は、地盤工学の多くの問題に関わる重要な力学的な性質の一つである。例えば、フィルダム、河川堤防の堤体や基礎地盤からの漏水、斜面の安定性に影響する浸透流などが挙げられる。このような諸問題を考える上で、欠かすことのできない土の透水性を定量的に評価するための定数が透水係数である。ダルシー (Darcy) は、動水勾配と土の中の流速 $v(\text{cm/s})$ との間には式 (1.1) の比例関係が成り立つことを発見した。この式はダルシーの法則と呼ばれ、一次元浸透流の運動方程式として用いられている。

$$v = ki \quad (1.1)$$

ここで、 v は流速、 k は透水係数、 i は動水勾配で土の中を流れる際に消費されるエネルギーで、図 1.1 の記号を使うと、水頭差 h と試料中を流れる長さ (浸透長) L との比、 $i = h/L$ で表される。なお、ダルシーの法則が成り立つ条件として、流れは時間的な変化がない定常流である必要がある。これは、図 1.1 で説明するなら、時間 t_1 では試料を挟んで左右の水頭差はなく、流れは生じていないとする。ただし、試料の間隙は水で満たされていて飽和状態にある。次に一瞬にして右側の水頭を $h(\text{cm})$ 下げたとする。一瞬のうちに水頭が下げられても、左右の流れも直ちに定常流になるわけではなく、図中に示した非定常流の流れが生じた後に、徐々に定常状態に落ち着くのである。それには $(t_2 - t_1)$ の時間が必要だったことを図は意味している。水理学でいう層流、乱流の層流状態でなくてはならない。また、図 1.1 の試料の断面積を A とすると、この試料中を流れる水の流量 $Q(\text{cm}^3/\text{s})$ は次式で表すことができる。

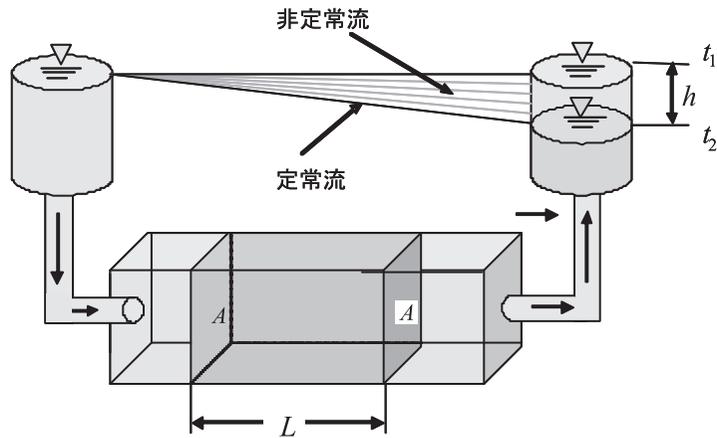


図 1.1 土中の流れの説明

$$Q = vA = kiA \quad (1.2)$$

1.2 透水係数の求め方

さて、この透水係数を得るための試験法を大きく分けると、室内透水試験と現場透水（揚水）試験であり、前者の室内透水試験は、比較的透水性の大きい試料に用いられる定水位透水試験と、透水性の小さいものに対して行う変水位透水試験の 2 種類に分けられる（図 1.2）．図 1.2(a) の定水位透水試験は、比較的小さな水頭差を与えて、一様な断面積内での流れを生じさせて、一定時間内での浸透水量を計測すればよいので、式 (1.2) の関係がそのまま利用できる．

$$k = Q/iA = Q \cdot L/h \cdot A \quad (1.3)$$

一方、図 1.2(b) の変水位透水試験では、試験対象となる供試体の透水性が低いため、真空ポンプなどを用いて脱気し、飽和させる．任意の時間 t_1 から t_2 の間にスタンドパイプ内の水位が、 h_1 から h_2 に低下する状態を計測する．スタンドパイプの断面積 a は、供試体の透水性が低い場合には小さく、高い場合には大きいものを選択し、スタンドパイプ内

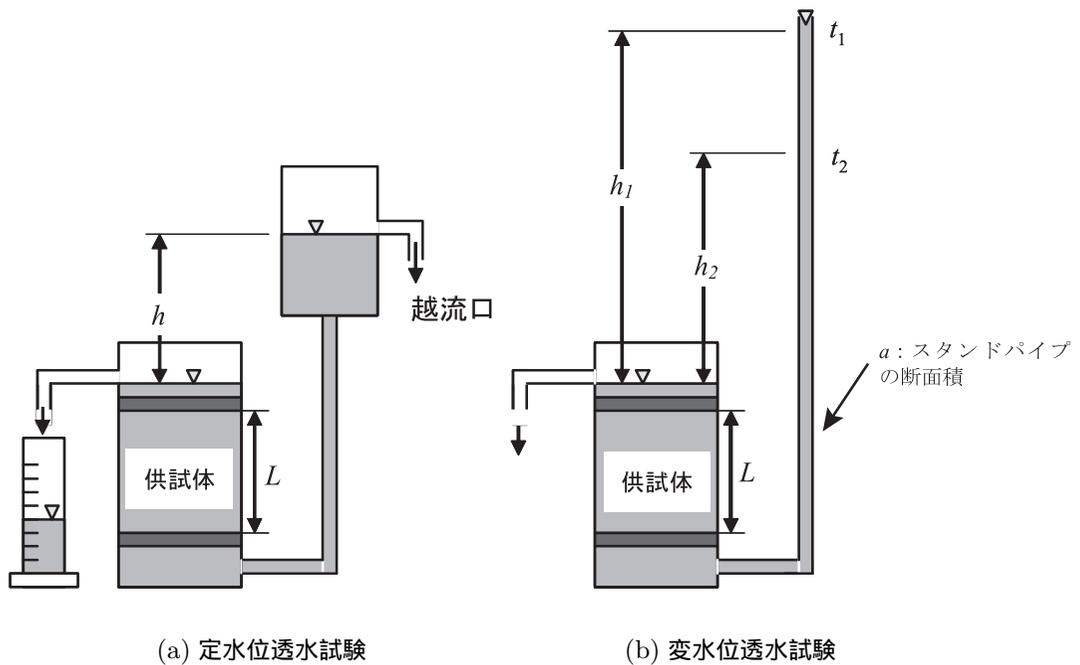


図 1.2 室内透水試験

の水位降下量の計測が容易となるように配慮する．透水係数は図の記号を利用して，次のように式を誘導した結果から計算される．

断面積 a のスタンドパイプの水位が dt 時間に， dh だけ低下したなら，その水量 dq は，

$$dq = -adh$$

また， dq は， $dq = kAidt$ であるから，

$$-adh = kAidt = kA(h/L)dt$$

この式を変数分離すると，

$$-\frac{1}{h}dh = kA\frac{1}{aL}dt$$

積分の形にすると，

$$-\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{h}dh = kA\frac{1}{aL} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

これを積分すると，

$$\begin{aligned} -[\log_e h]_{h_1}^{h_2} &= kA \frac{1}{aL} [t]_{t_1}^{t_2} \\ -(\log_e h_2 - \log_e h_1) &= kA \frac{1}{aL} (t_2 - t_1) \\ (\log_e h_1 - \log_e h_2) &= kA \frac{1}{aL} (t_2 - t_1) \\ \log_e \frac{h_1}{h_2} &= kA \frac{(t_2 - t_1)}{aL} \end{aligned}$$

自然対数では，

$$k = \frac{aL}{A(t_2 - t_1)} \log_e \frac{h_1}{h_2} \quad (1.4)$$

常用対数では，

$$k = \frac{2.30aL}{A(t_2 - t_1)} \log_{10} \frac{h_1}{h_2} \quad (1.5)$$

1.3 透水試験における飽和度の確認方法

これらの室内透水試験では，計測する土質材料の透水性をあらかじめ推定して，定水位透水試験，変水位透水試験を選択し，試験装置を準備する．当然一つのモールド（直径 10 cm，高さ 12.7 cm）で，一つの供試体しか計測が行えない．多くの試験を実施する際には供試体作製から試験装置の設置，計測まで何度も繰り返す必要があり，大変な労力や時間を費やさなければならない．ここでは，そのような問題を改善するために従来の試験器よりも簡便で，一度に 5 つの供試体の飽和透水試験を実施することができる新しい加圧型の試験装置を紹介する．この試験を実施する際にはチャンバーに設置する供試体に外圧を与えて，試験器外部に設置した間隙水圧計により，間隙圧係数 B 値を計測し，供試体の飽和状態を確認できる．透水係数が飽和度に依存して変化することは，後述する不飽和土の領域でよく示される浸透特性曲線（体積含水率 θ あるいは飽和度 S_r ，比透水係数 k_r の関係）からも明らかである．ところで，間隙圧係数 B 値については，三軸試験法の中では 0.95 以上（粘土では 0.9 以上）であれば飽和状態にあると見なされているが，明確に B 値と飽和度の関係は示されていない．そこで，紹介する飽和透水試験において得られた B 値がどの程度の飽和度にあるのかを，背圧を供試体に加えボイル・シャルルの法則とヘンリーの法則を用いて理論的に求めた結果と比較検討してみる．また，これらの飽和度の

確認方法を実施すると，得られる透水係数へ影響を及ぼすかを検証し，それぞれの適合性についても紹介する．

ところで，学習に必要な用語は，ゴシック体で示してある．それらの説明は章末にまとめてある．色々な意味で透水性を検証するとき用いられる定石を実例から学んでもらいたい．

(1) 試験装置と試験方法

提案している透水試験装置の概略を図 1.3 に示す．試験器の高さは 110 cm で，試験装置上部のチャンバー（内径 28 cm，高さ 16 cm，体積 9850 cm³）に供試体を設置する加圧型である．底部の水槽（体積 23,000 cm³）には，水中ポンプが設置してあり給排水に使用する．試験器前面に取り付けた目盛付排水管は可動式で，定水位透水試験時の水頭差は 1.0 cm 刻みで 12.0 cm までと，最大 26.2 cm の水頭差を与えることが可能である．変水位透水試験時には最大 50 kPa までの加圧ができる．

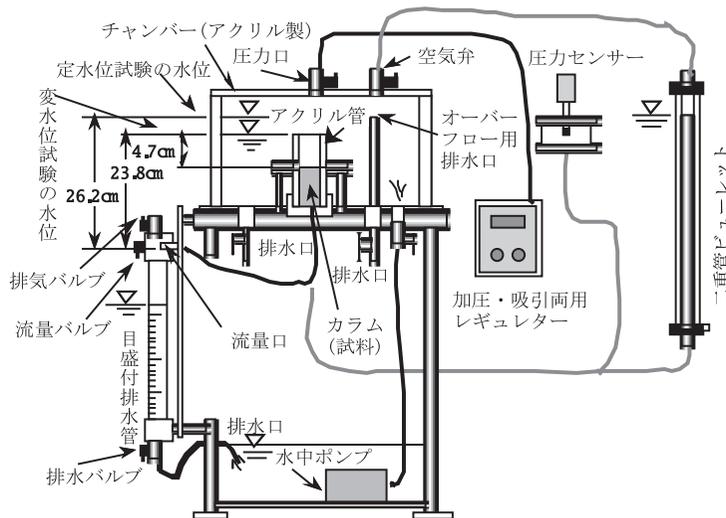


図 1.3 提案する透水試験装置の概略図

定水位透水試験時の計測項目は，目盛付排水管から読み取った流量とその時の計測時間である．飽和透水係数は，式 (1.6) を用いて算出することができる．

$$k_s = \frac{QL}{Ath} = 0.26 \frac{Q}{th} \quad (1.6)$$

ここに、 Q は流量、 A は供試体の断面積 (19.6 cm^2)、 h は水位差、 L は供試体の高さ (5.1 cm)、 t は計測時間である。

変水位透水試験の飽和透水係数は、次の式 (1.7) より求めることができる。

$$k_s = \frac{2.3aL}{At} \log_{10} \frac{h_1}{h_2} = \frac{16.25}{t} \log_{10} \frac{h_1}{h_2} \quad (1.7)$$

ここで、 a はアクリル管の断面積 (13.85 cm^2)、 A は供試体の断面積 (19.6 cm^2)、 L は供試体の高さ (5.1 cm)、 h_1 は計測開始時の水位差、 h_2 は計測終了時の水位差、 t は計測時間である。

チャンパー内の供試体寸法は、式 (1.6)、式 (1.7) にも出てきたように、直径 5.0 cm 、高さ 5.1 cm で体積は 100 cm^3 である (写真-1.1)。供試体の組立は、カラムにゴム製の Oリングを取り付け回転させるだけで、試料受器に固定できるように工夫しており、通水断面を容易に確保できる。

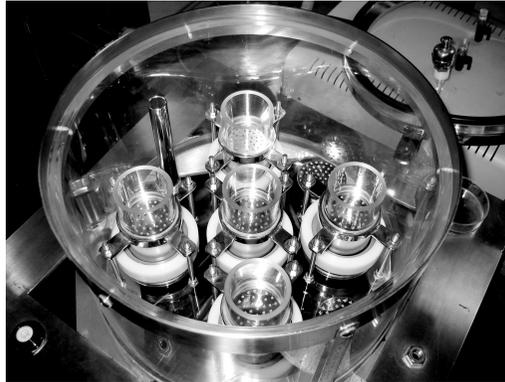


写真 1.1 チャンパー内の供試体

測定手順は、供試体をセットし底面から浸透させ、チャンパー内の所定の水位まで給水する。この水位と二重管ビューレット内の水位を一致させ、真空脱気を 1 時間行い、背圧 ΔP (圧力が低いと計測が難しいので 196.2 kPa) をかけて供試体内に流入した水量 ΔV を計測し、式 (1.8) から飽和度を換算する。

$$S_r = \frac{1}{1-H} - \frac{P_0 \Delta V}{\Delta P V_v} \quad (1.8)$$

ここで、 H はヘンリー係数、 P_0 は大気圧、 V_v は供試体の間隙部分の体積である。

続いて、間隙圧係数 B 値 (29.4 kPa を中心に ± 9.81 kPa の増減により上り、下り B 値を計測) を確認し、透水試験へと進む。同一の供試体に対して再度、真空脱気を 1 時間施し、同様の計測を繰り返す。これを 3 回、延べ 3 時間まで真空脱気した供試体の飽和度、 B 値および透水係数を求めた。透水試験は珪砂、碎石の供試体では定水位法を、砂質粘土では変水位法を選択した。碎石はカラムの大きさから極端に大きな粒径は取り除いている。

(2) 試験結果とその考察

図 1.4 に真空脱気時間を加算した、それぞれの試料の間隙水圧係数 B 値と飽和度の関係を示す。それぞれの試料は特徴のある挙動を示している。珪砂は B 値の変動は少ないが飽和度は真空脱気時間が増すにつれて増加する。碎石は逆に B 値は増加するが飽和度の変動は少ない。砂質粘土は脱気時間が増すと B 値も飽和度も増加している。 B 値と飽和度の関係には、土質材料に関わらず相関関係が見られればと考えたが、その関係は土質材料によって異なる結果となった。

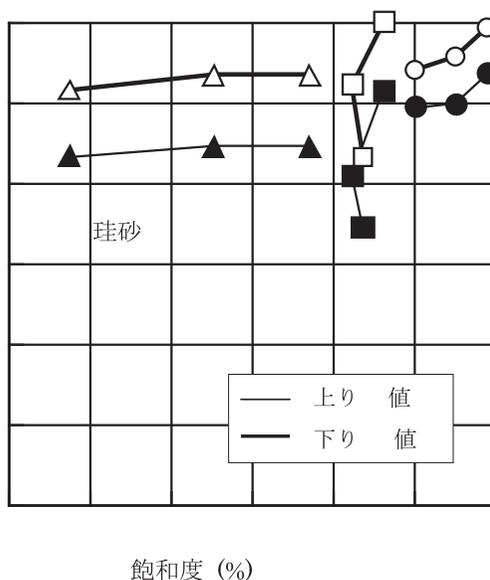


図 1.4 B 値と飽和度の関係

図 1.5 には碎石の供試体に対して、真空脱気 背圧 B 値の計測を終了した段階ごとに行った透水試験結果 (普通目盛) を示す。横軸は 1.0 cm 間隔で変化させた水頭差を動水

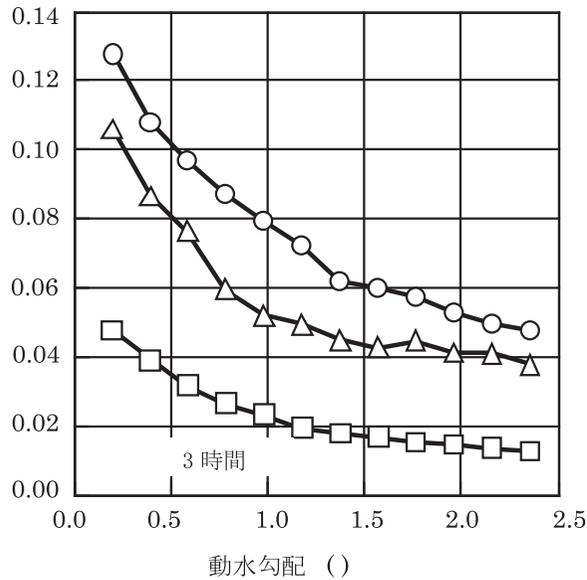


図 1.5 碎石の透水係数と動水勾配の関係

勾配で表している。

図 1.4 から明らかのように飽和度は上昇しているにも関わらず，その確認作業を繰り返すごとに供試体の透水性が低下していく状況が見受けられる．その減少傾向は図中に破線で示したように，動水勾配で 0.5～1.0 の範囲で変化する二つの異なる勾配に沿って直線的に変化することがわかる．ここでの試験結果のレイノルズ数 Re は全ての試料に対して理論的 ($Re < 1$) には層流域にある．ただし，碎石の層流・乱流域は他の土質材料と異なり，層流域の透水性を得るには特に動水勾配を小さくとる必要がある．そこで，図 1.6 に碎石の流速と動水勾配の関係を両対数目盛で表した．この図中の勾配が 1 なら層流で，それを超える勾配は乱流状態にあると判断できる．変化点よりも小さな動水勾配を破線で示した直線の勾配は 1 より幾分か大きい，それ以上の動水勾配では，さらに勾配が増し乱流域での透水性を計測していたことがわかる．

計測結果から飽和度の確認方法について考察すると，間隙圧係数 B 値と飽和度の関係は，土質材料により異なり一様な相関関係にはない．砂質土では B 値に変化がなくとも真空脱気の時間を増やすことにより飽和度は高くなる．真空脱気は少なくとも 3 時間は行う必要がある．上り B 値の方が下り B 値より低い値を示す．間隙圧係数 B 値から，ほぼ

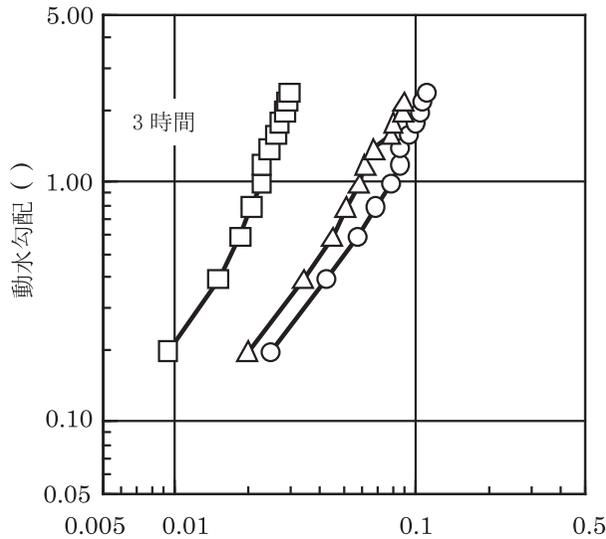


図 1.6 碎石の流速と動水勾配の関係

飽和状態と判断するには上り B 値で 0.98 以上とすればよい。

以上、提案する透水試験器を紹介し、その適用性を実験から検討した結果を簡単に説明した。説明に際し、ゴシック体で示した用語を説明することが、本書を活用する初学者には、実験を通してより実用的な観点から本質の理解が進むと考えている。以下に、それらを紹介するので、理解した上で前述した本文と併せて再度読み返してもらいたい。

(3) 用語の説明と実例

a) 層流とレイノルズ数 Re

水理学で言う層流 (laminar flow) は、流速がある限界より小さいうちは、水の粒子は管の軸線に平行に層状を整然と流れる。乱流 (turbulent flow) は、流速が大きくなれば水粒子は互いに入り混じって渦を巻いて流れる。これはレイノルズ (Reynolds) が行った実験からの結論である。そして、その結果からレイノルズは、レイノルズ数 (Reynold's number) を導いた。これによって層流と乱流の変化がわかり、移り変わるときのレイノルズ数を限界レイノルズ数 (Critical Reynold's number) という。

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (1.9)$$

ここに、 v は断面の平均流速 (m/s)、 D は管の内径 (m)、 ν は水の動粘性係数 (m^2/s)。管内の流れでの目安は、 $Re \leq 2000$ である。

さて、地盤中の流れにおける限界レイノルズ数は一般に $Re \leq 1$ の関係が成立するとき層流域にあると言われ、次式から算定される。

$$Re = \frac{\rho_w v D}{\mu} \quad (1.10)$$

ここに、 v は流速 (cm/s)、 D は平均粒径 (D_{50} または D_{60}) (cm)、 μ は水の粘性係数 (g/s cm) である。また、乱流域では式 (1.1) は次式となる。

$$v = ki^m \quad (1.11)$$

m は $0.5 < m < 1$ の間にあるといわれている。

b) 間隙圧係数 B 値と背圧

この間隙水圧分の移動量をスケンプトン (A.W. Skempton) の間隙圧係数の考え方をを用いて表示すると次のようになる。詳細は土のせん断強さを参照。

スケンプトンの過剰間隙水圧の関係式は、

$$\Delta u = B \{ \Delta \sigma_3 + A (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_3) \} \quad (1.12)$$

ここで、 A 、 B とともに実験定数で A の値は破壊時において、ゆるぎめの土で $A_f > 0$ 、締まった土で $A_f < 0$ である。 $A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)$ は体積変化量を示す。また、 B は普通、 $B < 1$ であるが、飽和状態では $B = 1$ となる。もう少し理論的に測定原理を紹介すると、試験装置の形状から供試体の側面は、剛な材質であるステンレスで覆われている。従って、側方への変位は生じない K_0 条件下にある。供試体の初期の体積を V_0 、その間隙比を e_0 とすれば、間隙部分の体積は $n_0 \times V_0$ となる。ここで、 n_0 は供試体作製時の間隙率である。

供試体を設置し、供試体底面より浸透水を浸潤させていくと、間隙中に水が満たされていく。次に、チャンバー内にも水を満たす。供試体上面より高い位置まで、その水位が上がれば、供試体上面とその水位の差だけの水圧が供試体上面に加わることになる。なお、この操作を行う上で、非排水圧 $\Delta \sigma_{v0}$ を上昇させると (全応力は $\Delta \sigma = \Delta h \gamma_w + \Delta \sigma_{v0}$ と表示、ここで、 Δh はチャンバー内の水面から供試体上面までの水位差、 γ_w は水の単位体積重量である)、供試体内に存在する空気や、浸透水中に気泡が入っている場合には、水圧の増加量 Δu によって気泡が縮み、間隙部分の体積がその分だけ収縮する。この収縮し

た体積を ΔV_w として、水の K_0 条件下での圧縮の度合いを C_w で示すと以下のように表される。

$$\Delta V_w = n_0 V_0 C_w \Delta u \quad (1.13)$$

一方、土の骨格が全応力 ($\Delta\sigma = \Delta h\gamma_w + \Delta\sigma_{v0}$) のうちで $\Delta\sigma_v'$ だけを受けたとすれば、供試体には、次式に示す鉛直ひずみ ε_v が生じる。

$$\varepsilon_v = C_s \Delta\sigma_v' \quad (1.14)$$

ここで、 C_s は K_0 条件下で供試体を鉛直方向に圧縮する度合いを示す量とする。供試体の土の骨格の体積が圧縮する量を ΔV_s とすると、

$$\Delta V_s = V_0 C_s \sigma_v' \quad (1.15)$$

となる。ここで、供試体中の間隙部分が水で飽和されているとすれば、非排水条件であるから、水の体積変化量と土の骨格の体積変化量は等しくなるために、式 (1.13) と式 (1.15) は等しくなる。

$$n_0 V_0 C_w \Delta u = V_0 C_s \Delta\sigma_v' \quad (1.16)$$

また、有効応力の原理から、 $\Delta\sigma_v = \Delta\sigma_v' + \Delta u$ であるから、この関係を用いて式 (1.16) 中の土の骨格が受け持つ応力分 $\Delta\sigma_v'$ を消去すると、

$$\Delta u = \frac{1}{1 + n_0 C_w / C_s} \Delta\sigma_v \quad (1.17)$$

式 (1.17) 中の C_w / C_s は土の骨格の圧縮度合いに比べて、水の圧縮度合いは僅かなものであり、 C_w / C_s は無視することができる程度の値であるので、式 (1.17) は式 (1.18) となる。

$$\Delta u = \Delta\sigma_v \quad (1.18)$$

当然、このような条件を満たすためには、供試体は飽和していなければならない、式 (1.18) の両辺の比をとったものが間隙圧係数 B と呼ばれる値で、飽和していれば、

$$B = \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_v} = 1 \quad (1.19)$$

となるのであるが、不飽和な状態であれば、式 (1.20) の関係となる。

$$B = \frac{\Delta u}{\Delta\sigma_v} < 1 \quad (1.20)$$

といったところである。

また、背圧 (back pressure) は三軸圧縮試験で多用されている。背圧を加えることは供試体内に毛管張力が存在すれば、それを消滅し飽和させる効果がある。

c) ボイル・シャルルの法則とヘンリーの法則

ここで説明するのは、理科の法則としての内容ではなく、実験結果で説明した背圧を加えたことにより得られる飽和度が、これらの法則とどのように関係しているかである。

表 1.1 ヘンリーの定数

°C	K(ケルビン)	H
0	273	0.0288
5	278	0.0260
10	283	0.0235
15	288	0.0216
20	293	0.0201
25	298	0.0188
30	303	0.0176
35	308	0.0165

式 (1.21) はボイル・シャルルの法則とヘンリーの法則から導かれたもので、三軸圧縮試験で粘土に背圧を与えて飽和度 S_r を高めるときに使われる式である。

$$S_r = \frac{1}{1-H} - \frac{P_0}{P_0 - \Delta P} \left[\frac{1}{1-H} - S_{r0} \right] \quad (1.21)$$

ここで、 H はヘンリーの定数に相当する値で、表 1.1 に示した。 P_0 は大気圧 (98.1 kN/m²)、 ΔP は背圧の大きさ、 S_{r0} は供試体の初期の飽和度である。初期飽和度は透水試験を行う際に浸潤させたときの値で、これは簡単には求められない。そこで、

$$P_0(V_{a0} + HV_{w0}) = (P_0 + \Delta P)(V_{a1} + HV_{w1}) \quad (1.22)$$

V_{a0} は背圧を作用させる前の供試体内の間隙空気の体積、 V_{a1} は背圧を ΔP だけ作用させたときの供試体内の間隙空気の体積。 V_{w0} は背圧を作用させる前の供試体内の間隙水の体積、 V_{w1} は背圧を ΔP だけ作用させたときの供試体内の間隙水の体積である。これらの

差が背圧を作用させたときの間隙水の体積増分 ΔV に等しくなる．よって，

$$\begin{aligned} V_{a0} - V_{a1} &= \Delta V \\ V_{w1} - V_{w0} &= \Delta V \end{aligned} \quad (1.23)$$

式 (1.22) と式 (1.23) から， V_{a1} と V_{w1} を消去すると，

$$\Delta V(H - 1)(P_0 + \Delta P) + \Delta P(V_{a0} + HV_{w0}) = 0 \quad (1.24)$$

となり，初期飽和度 S_{r0} は，

$$S_{r0} = \frac{1}{H} - \frac{\Delta V(P_0 + \Delta P)}{V_v \cdot \Delta P} \quad (1.25)$$

式 (1.25) の V_v は供試体の間隙部分の体積であり，供試体の乾燥密度と土粒子の密度が分かっているならば求められる． ΔV は ΔP を作用させたときに供試体内に流入した水量を測定すれば求められる．式 (1.21) に式 (1.25) を代入すれば，実験によって得られる飽和度は，次式 (本文中の式 (1.8)) で求められる．

$$S_r = \frac{1}{1 - H} - \frac{P_0 \Delta V}{\Delta P V_v} \quad (1.26)$$

1.4 二次元浸透流の基礎方程式

一次元の流れの場合における支配方程式は，ダルシーの法則 ($v = ki$) であることは理解していると思う．そのときの基本的な条件は，地盤内を土中水が流れている．この流れは時間に依存しない定常な流れであるであった．これを二次元の流れに拡張してみよう．流れの方向は鉛直方向と，それに直交する水平方向となり，それぞれの方向の透水係数は， k_v と k_h で表すことにする．基本的な条件は一次元と同様であるから，図 1.7 に示した微小部分に流入する水量と流出する水量は常に等しくなる．

いま，微小部分の左から流入する x 方向の速度成分を v_x とすると， ab 面の midpoint での速度成分は，式 (1.27) となり，テーラー展開した結果はその右辺である．したがって，流入水量は式 (1.28) で表わされる．

$$v_x \left(x, z + \frac{\Delta z}{2} \right) = v_x(x, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \quad (1.27)$$

$$\left(v_x(x, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \right) \Delta z \quad (1.28)$$

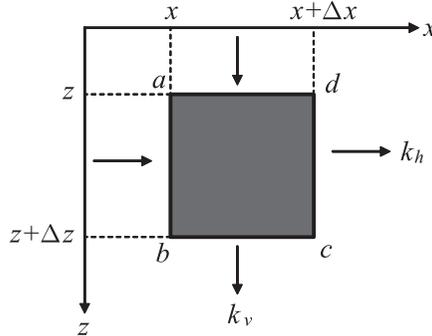


図 1.7 微小要素

また、微小部分の右端面 cd の中点では、左端より Δx だけ大きくなるから、右端の速度成分は式 (1.29) で表され、その流出水量は式 (1.30) で示される。

$$v_x \left(x + \Delta x, z + \frac{\Delta z}{2} \right) = v_x(x, z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \quad (1.29)$$

$$\left(v_x(x, z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \right) \Delta z \quad (1.30)$$

したがって、図 1.8(a) 単位時間当たりの x 方向へ流出した水量 Δq_x は、式 (1.28) – 式 (1.30) であるから、

$$\begin{aligned} \Delta q_x &= \left(v_x(x, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \right) \Delta z - \left(v_x(x, z) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Delta z \right) \Delta z \\ &= -\frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (1.31)$$

同様に、図 1.8(b) 鉛直方向の流出量は、

$$\Delta q_z = -\frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta z \quad (1.32)$$

ところで、基本的な条件から流れは時間に依存しない定常な流れであるので、微小部分に流入する水量と流出する水量は常に等しくなる。つまり、式 (1.31) と式 (1.32) を足しても 0 のはずであるから、

$$\Delta q_x + \Delta q_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.33)$$

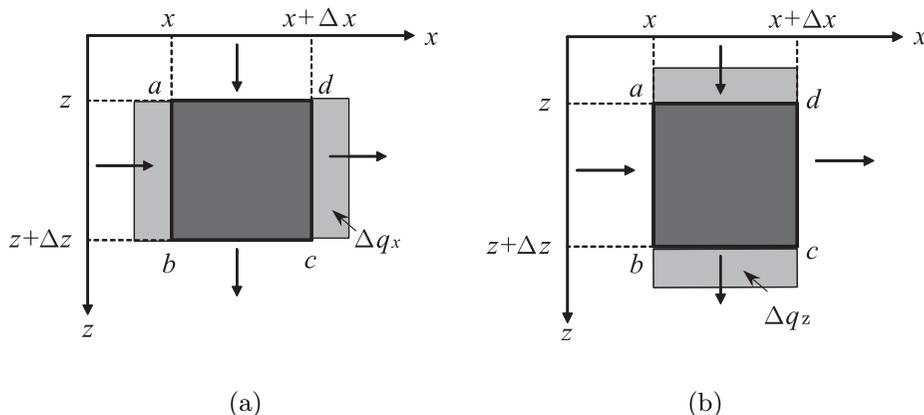


図 1.8 微小要素内の流れ

また， v_x とその方向の透水係数 k_h との間にはダルシー則が成立するので，

$$v_x = k_h i \left(= k_h \frac{\Delta h}{\Delta x} \right)$$

動水勾配 i を水頭 h が x 方向へ流れる間に生じる損失と考えると，

$$i = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad i = -\frac{\partial h}{\partial z}, \quad v_x = -k_h \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_z = -k_v \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.34)$$

式 (1.34) を式 (1.33) に代入すると，

$$k_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_v \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1.35)$$

$k_h = k_v$ とおけば，

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1.36)$$

式 (1.36) は，ラプラスの方程式と同型となり，二次元の場合における浸透流の基礎方程式は，ラプラスの方程式を与えられた境界条件の基に解けばよいことが分かる．

1.5 流線網

流線網とは地盤中の二次元浸透流の状態を二組の曲線群で網目状に表したものである。一組は流線と呼ばれ、水分子がたどる軌跡を表し、もう一組は等ポテンシャル線と呼ばれ、水頭の等しい点を結んでいる。均一等方性地盤中では流線と等ポテンシャル線は直交する性質がある。この流線網を利用して① 浸透水量、② 流速、③ 任意の位置における水頭、を求めることができる。

流線網を手書きで描くときには、試行錯誤を繰り返しながら、流線と等ポテンシャル線が直交し、さらにそれが作る格子網が「正方形」になるように描いていく。しかし、様々な境界形状に対応して圧力が増減し、その結果、流速が変化するので等ポテンシャル線の間隔は一樣ではなくなり正確な正方形で表すことが不可能になる。従って、円が内接するような「正方形」格子網(数学的には外接四角形と呼ばれるもので、その必要十分条件は、その二組の対辺の和が等しい)を描くことになる。

ところで、流線と等ポテンシャル線を直交して描くと述べているが、ここで、その点について証明しておく。

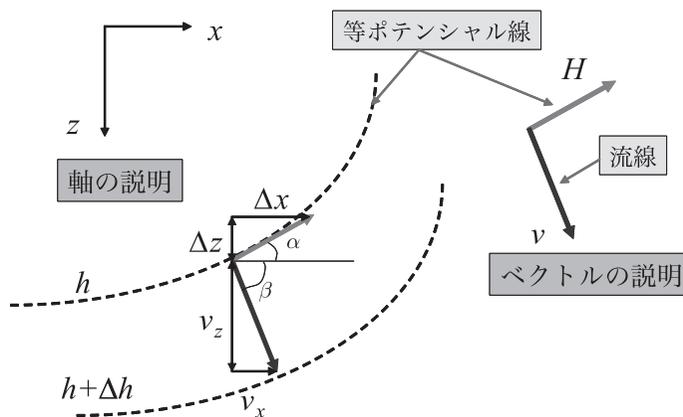


図 1.9 流線網の概略図

図 1.9 に流線網の一部を示した。破線が等ポテンシャル線で、図の等ポテンシャル線に沿ったベクトル H と、流速を示すベクトル v が直交していることを証明 ($\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$) すればよい。

ベクトル H はポテンシャル上にあるから、その始点から終点の水頭の変化 $\Delta h_H =$

0 である．ベクトル H を分解した Δx と Δz (x は右向きが正で， z は下向きを正とする) は次式で示される．

$$\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial h}{\partial z} \Delta z = 0 \quad (1.37)$$

また，図 1.9 の記号を使った式 (1.38) の関係と，ダルシーの法則の関係式の式 (1.39) および，ベクトル v から

$$\frac{\Delta x}{H} = \cos \alpha, \quad \frac{\Delta z}{H} = -\sin \alpha \quad (1.38)$$

$$v_x = -k_h \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_z = -k_v \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.39)$$

$$\frac{v_x}{v} = \cos \beta, \quad \frac{v_z}{v} = -\sin \beta \quad (1.40)$$

の関係を得て，式 (1.39) に式 (1.40) を代入すると，

$$\cos \beta = -\frac{k_h}{v} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \sin \beta = -\frac{k_v}{v} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (1.41)$$

式 (1.38) と式 (1.41) の関係を用いて，加法定理で示すと，

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{\Delta x}{H} \left(-\frac{k}{v} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\Delta z}{H} \right) \left(-\frac{k}{v} \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{k}{Hv} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial z} \Delta z \right) \end{aligned} \quad (1.42)$$

式 (1.42) の括弧内は式 (1.37) と等しく 0 である． $y = \cos x$ のグラフで 0 の軸と交わるのは $\pi/2$ ，つまり $\alpha + \beta = 90^\circ$ のときである．従って，流線と等ポテンシャル線は直交することが証明された．

さて，本題に戻って図 1.10 のシートパイル (止水矢板) の下を浸透水が流れる状態を示した流線網を用いて，上記した流線網の利点を実際に確認してみる．ただし，地盤は均一平方性である．

まず，① 浸透水量を求めるときには，ダルシーの法則に従って，流量 Q は， $Q = kiAt(\text{cm}^3)$ で表される．次に，図中の網目の一マスを考える (図 1.11)．この一マスは一辺 a の正方形であるとすれば，一マスの流入側から流出側までに失われる水頭は，矢板の左側から右側までに至るときに失われた水頭 Δh の 8 分の 1 になる．ここでの 8 (①～⑧の数字) とは流線が等ポテンシャル線によって区切られた数で，この数を N_d とする．ま

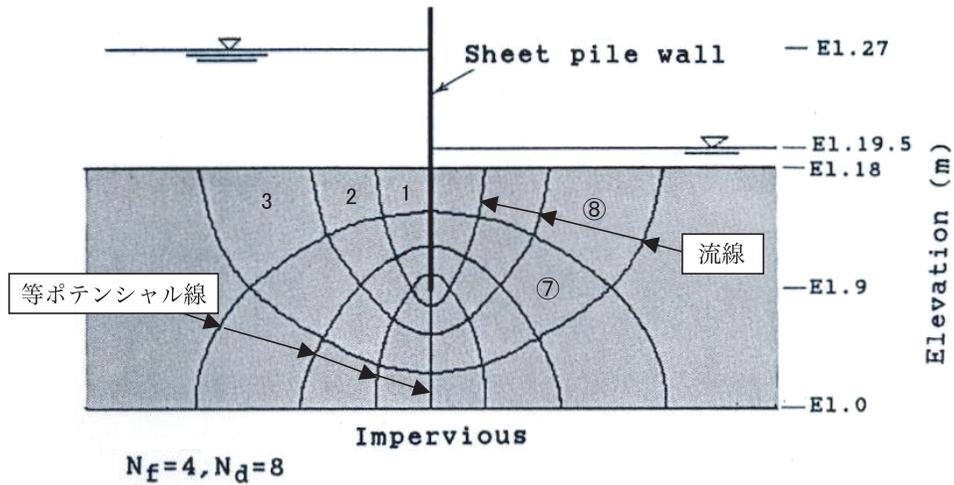


図 1.10 シートパイルの下を浸透水が流れる状態を示した流線網

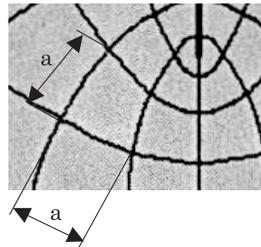


図 1.11 流線網の一マス

た、流線によって区切られた数を N_f とする（この図では 4(1~4 の数字)である)。 N_d と N_f は形状係数と呼ばれるもので、描いた流線網から読み取ればよい。

この図の関係を使って二本の流線で挟まれた一区間の奥行き 1 の浸透水量 q を式で示すと、

$$q = kiA = k \frac{\Delta h}{N_d} \frac{1}{a} \times a \times 1 = k \frac{\Delta h}{N_d} \quad (1.43)$$

$\Delta h/N_d$ は一マスの中を流れる時に失われる水頭を表し、それに $(1/a)$ をかけることにより、動水勾配 $i = \frac{h}{L} = \frac{\Delta h}{N_d} \frac{1}{a}$ で示されることが理解できる。また、 $a \times 1$ は a の幅の奥行き 1 の断面積 A を表している。したがって、全体の浸透水量 Q は、式 (1.43) を流路数で

ある N_f 倍してやればよいので，

$$Q = k\Delta h \frac{N_f}{N_d} \quad (1.44)$$

となる．いま，この地盤の透水係数は $k = 2.0 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$ とすると奥行き 1 m 当たりの浸透水量は，次の結果となる．

$$Q = k\Delta h \frac{N_f}{N_d} = 20 \times 10^{-5} \times 750 \times \frac{4}{8} \times 100 = 0.75 \text{ cm}^3/\text{s} \quad (1.45)$$

ここで， Δh は左側の水位の 27.0 m から右側の 19.5 m との差 7.5 m = 750 cm，単位を cm でとっているのので，奥行き 1 m を 100 cm として掛けていることに注意を要する．

次に，② の流速について考えてみよう．流速は $v = ki = k(\Delta h/L)$ であるから，透水係数が等しければ動水勾配に左右されることになる．流れ（流線の方向）が生じるときに等ポテンシャルのラインを横切ることになるが，等ポテンシャル線の間隔は異なっても，そこで損失される水頭の値は等しい．したがって，等ポテンシャル線間（流路）の長いところほど動水勾配の値が小さくなるので，流速が遅くなることがわかる．流線網を見ればその網目の小さいところほど流速が速く，逆に網目が大きい場合は遅いと，流線網を人目見ただけで判断できるのである．

最後に，③ の任意の位置における水頭の求め方を説明する．非粘性，非圧縮性流体の飽和域での定常流れについて，式 (1.46) のベルヌーイの法則は，圧力水頭 (p/ρ_w) と位置水頭 z と速度水頭 $v^2/2g$ の合計はいかなる点でも等しいことを示している．

$$\frac{p}{\rho_w} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{const.} \quad (1.46)$$

地盤中では速度水頭は非常に小さく無視できるので，

$$\frac{p}{\rho_w} + z = \text{const.} \quad (1.47)$$

としてよい．

式 (1.47) を用いて，図 1.12 中の A 点と B 点の水頭を求めると，シートパイルの左側から右側へ向かって浸透水が流れたときに損失する水頭は， $\Delta h = 27.0 - 19.5 = 7.5 \text{ m}$ である．また，基準面を $El.18.0 \text{ m}$ にとり，この基準面から A 点までの距離を 3.0 m， B

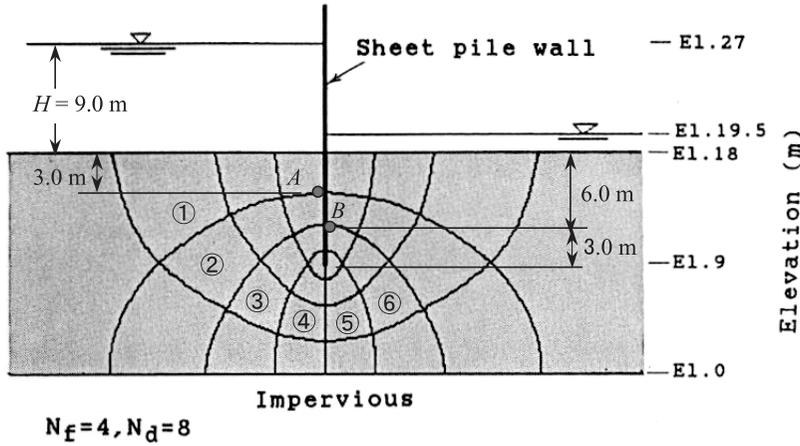


図 1.12 流線網の計算条件

点までの距離を 6.0 m とすると、圧力水頭 + 位置水頭 = 全水頭であるから A 点は、

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho_w} + z &= H - \frac{\Delta h}{N_d} \\ \frac{p}{\rho_w} + (-3.0) &= 9.0 - \frac{7.5}{8} \times 1 \\ \frac{p}{\rho_w} &= 11.06 \text{ m} \end{aligned} \quad (1.48)$$

となる。ここで、 H は基準面に加わっている水頭を示し、位置水頭 z は基準面より下にあるので負の値となる。 $(7.5/8) \times 1$ の $(\times 1)$ は求める点までに通過した流線網のマス目の数である。したがって、B 点では、この値は $(\times 6)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho_w} + (-6.0) &= 9.0 - \frac{7.5}{8} \times 6 \\ \frac{p}{\rho_w} &= 9.38 \text{ m} \end{aligned}$$

となる。求める点によっては等ポテンシャル線上にはないときもあり、そのときには小数点を含んだ値で処理する。また、基準面は任意に決めてよく、El. 0.0 m の位置とするならば、A 点を求める場合は、 $H = 27.0 \text{ m}$ 、 $z = 15.0 \text{ m}$ となるので、

$$\frac{p}{\rho_w} + 15.0 = 27.0 - \frac{7.5}{8} \times 1 \quad \rightarrow \quad \frac{p}{\rho_w} = 11.06 \text{ m}$$

と等しい結果を得る。

土質工学における図式解法には、ここで説明した流線網の他にクルマンのクーロン土圧、斜面の安定解析における分割法、モールの応力円などがある。図式解法は、直接視覚によって確認しながら全体の見通しをつけられる有効な工学的解析方法である反面、読み取り誤差や作図上の誤差もはいる。その解を利用するときには誤差がどの程度であるかを知っておく必要がある。特に、流線網はモールの応力円などの幾何学的な作図と違いフリーハンドで描いていくので、作図上の誤差や精度の高い数値解析結果を図化するときなどには問題が残る。

著者が以前に検討した図 1.13 の結果によれば、形状係数 N_d と N_f が大きくなる（分割数が多くなる）ほど、誤差が小さくなり 1 % 前後の誤差内で計算できることがわかっている。この解析の基になっているのは、Lambe らによる土質力学の成書で、そこに描かれていた流線網の条件は、 $N_f = 4, N_d = 12$ ($N_f/N_d = 0.333$)、コンクリートダム下の地盤の透水係数は、 $k = 5.145 \times 10^{-6}$ m/s で、単位奥行き当たりの浸透水量 Q は 10.29×10^{-6} m³/s であった。表 1.2 に図 1.13 から得られた結果と Lambe らの結果との比率を誤差として示す。

表 1.2 図 1.13 の解析結果

N_f	N_d	N_f/N_d	$Q(\times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})$	誤差 (%)
3.20	10	0.320	9.88	4.0
4.03	12	0.336	10.37	0.8
5.39	16	0.337	10.40	1.0

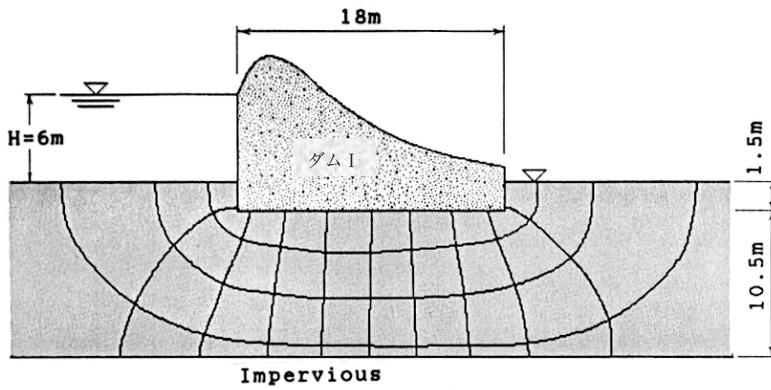
また、図 1.14 はコンクリートダムの左右何れか一端にシートパイルが打設された場合の流線網である。流線網の形状の変化が見て取れる。

式 (1.48) から求められた水頭（間隙水圧）は、図 1.14(a), (b) 中の 1~7 で示した等ポテンシャル線との接点では、コンクリートダムを持ち上げようとする揚圧力として働いていることになる。シートパイルの打設位置の違いによって、揚圧力がどの程度軽減されるかが流線網を利用した解析結果として得られる。図 1.14(a), (b) の $N_f = 4, N_d = 14$ と共通である。コンクリートダムの底面は、地表面から - 1.5 m の位置にある。

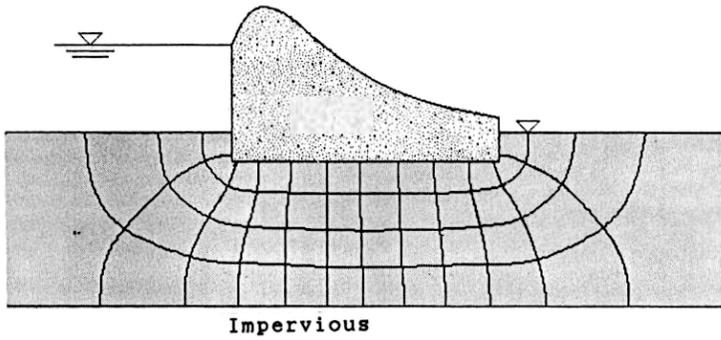
ダム II の 1 の位置の間隙水圧（揚圧力）は、

$$\frac{p}{\rho_w} + (-1.5) = 6.0 - \frac{6.0}{14} \times 6.5$$

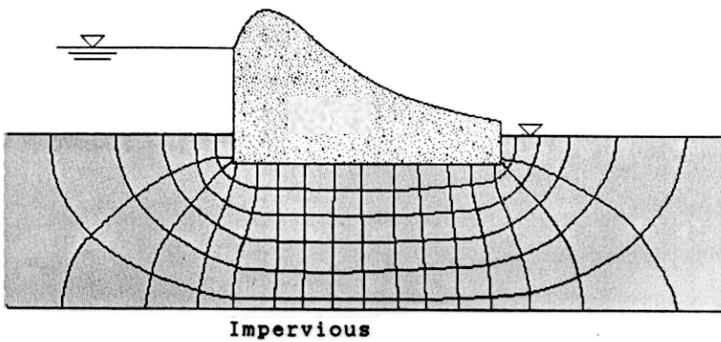
$$\frac{p}{\rho_w} = 4.71 \text{ m} \quad \rightarrow \quad p = 4.71 \text{ t/m}^2 = 46.2 \text{ kN/m}^2$$



(a) $N_f=3.202, N_d=10$



(b) $N_f=4.03, N_d=12$



(c) $N_f=5.388, N_d=16$

図 1.13 流線網の分割数による違い

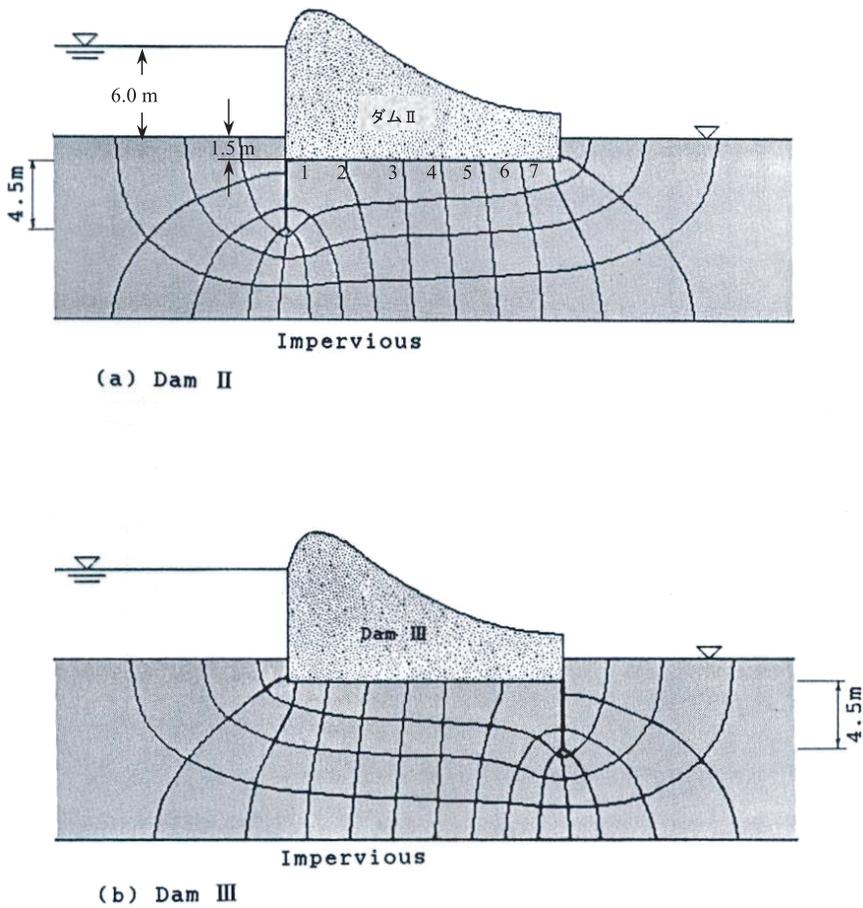


図 1.14 シートパイルの打設位置による流線網の変化

表 1.3 ダム底面での揚圧力の比較 (kN/m²)

	1	2	3	4	5	6	7
ダム II	46.2	44.1	39.9	35.7	31.5	27.3	23.1
ダム III	65.2	61.0	56.8	52.6	48.3	44.1	42.0

一方，ダム III の 1 の位置の間隙水圧 (揚圧力) は

$$\frac{p}{\rho_w} + (-1.5) = 6.0 - \frac{6.0}{14} \times 2$$

$$\frac{p}{\rho_w} = 6.64 \text{ m} \rightarrow p = 6.64 \text{ t/m}^2 = 65.2 \text{ kN/m}^2$$

となり、ダムIIの左端のシートパイルによって、ダム底面の揚圧力が軽減されていることがわかる。それぞれのダム底面の1~7の位置における揚圧力は表1.3にまとめてある。

1.6 異方性地盤での流線網

自然地盤の多くは地表面に平行に堆積しており、その水平な方向の透水性が、それに対して鉛直な方向な透水性より大きな場合が多い。このようなケースをこれまで述べてきた均一方形性地盤に対して、異方性地盤という。二次元の浸透流であるので、 x 面と z 面に対する透水異方性地盤として取り扱う。

透水異方性地盤における流線網は、異なる透水性の比の平方根の値 R だけ、ゆがんだスケールに対して(変換断面)、等ポテンシャル線と流線がつくる網目が直交するように作図する。その作図が完成したなら、変換した方向の距離を $1/R$ 倍して実際断面に戻したものが、その透水異方性地盤の流線網である。

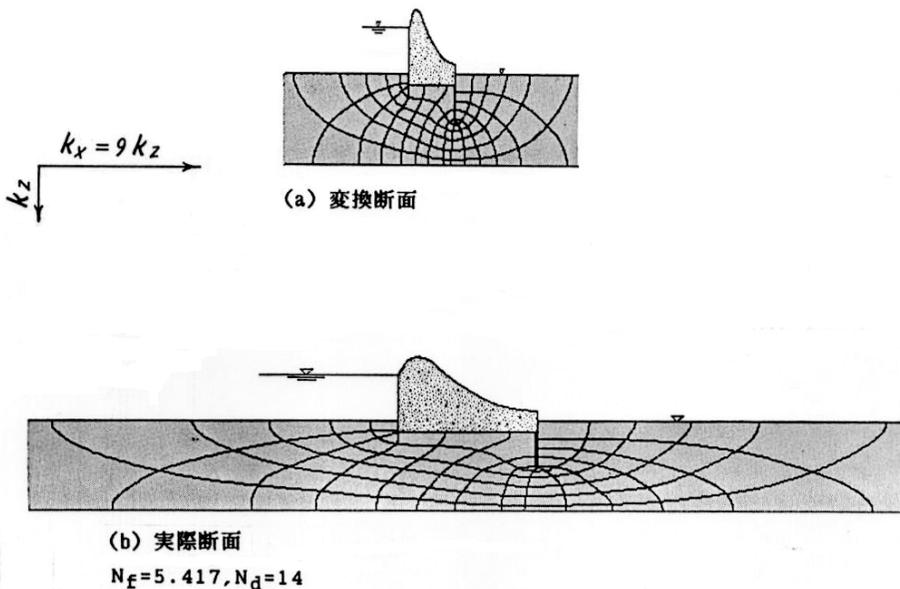


図 1.15 透水異方性地盤での流線網

例えば、水平方向の透水係数 k_h がその鉛直方向の透水係数 k_v より 9 倍の大きさを持

つ場合は，

$$R = \sqrt{\frac{k_v}{k_h}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad (1.49)$$

となるので， x 方向（水平方向）の距離を R 倍した変換断面を作図する．図 1.15 に前述したダム III の流線網を示してある．(a) が変換断面で，(b) が実際断面である．図 1.14(b) の結果と比較すれば，その違いの大きさに気づくことができる．

1.7 簡便な計算図

二次元の浸透流の図解法を説明してきたが，マスカット (Muskat) の有効な計算図を紹介しておく．それは図 1.16 に示した Muskat による計算図である．この図の記号を説明すると， D は透水層厚， d_1 はシートパイルの根入れ深さ， d_2 は掘削深さ， Q は浸透水量， k は透水係数， h は水頭差である．この図の結果を図 1.10 の条件から，式 (1.45) に示された結果と比較してみる．図 1.10 の地盤の透水係数は $k = 2.0 \times 10^{-5}$ cm/s で，奥行き 1 m 当たりの浸透水量は次の結果であった．

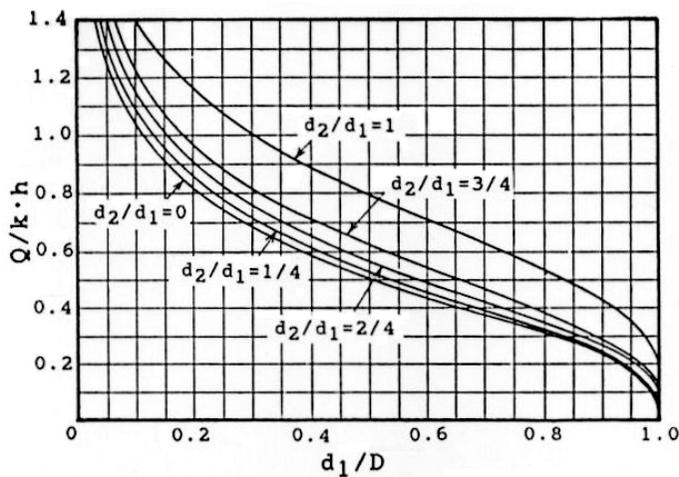


図 1.16 Muskat の計算図

$$Q = k\Delta h \frac{N_f}{N_d} = 20 \times 10^{-5} \times 750 \times \frac{4}{8} \times 100 = 0.75 \text{ cm}^3/\text{s}$$

図 1.16 の計算図では、透水層厚 $D = 18.0$ m , シートパイルの根入れ深さ $d_1 = 9.0$ m , 掘削深さ $d_2 = 0$ m , $d_1/D = 9.0/18.0 = 0.5$, $d_2/d_1 = 0$ であるから、図 1.16 の縦軸である $Q/kh = 0.5$ を得る。よって単位奥行き当たりの流量 Q は、

$$Q = 0.5 \times kh = 0.5 \times 2.0 \times 10^{-5} \times 750 \times 100 = 0.75 \text{ cm}^3/\text{s}$$

と、等しい結果を得る。縦軸の Q/kh が N_f/N_d に対応していることがわかる。また、掘削深さ d_2 の影響まで加味されていることには感心する。

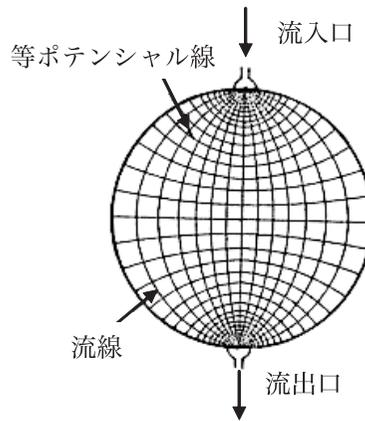


図 1.17 円形内での流れ

これに関連するわけではないが、著者は以前に図 1.17 に示したような二次元平面問題で、円的一端から流入し、その向かい合う一端から流出する流れの場での透水係数の算定式を求める必要に迫られた。等角写像理論による理論解、差分や境界要素法などの数値解、電気アナログ法などの実験による解と、その時点での最もらしい解析を重ねて求めたのは次式中の α である。この α は前述した流線網のところに示した式 (1.44) を変形したもので、 $\alpha = N_d/N_f$ とおいただけのものである。

$$k = \frac{Q}{\Delta h} \frac{N_d}{N_f} = \frac{Q}{\Delta h} \alpha \quad (1.50)$$

つまり、境界内のポテンシャル値を求めて、それに基づいて流線網を描いて N_d と N_f を求めるだけのことに必死になっていたわけである。流線網を描くのに少しでも客観性を持たせようとコンピュータ処理もしたが、解析方法の影響など色々な要素が含まれてか、 α の値は 3.5 ~ 4.5 の範囲にあることが判った。勿論、流出入する開口部の幅に影響を受け

る．著者が解析結果に信ぴょう性を持たせたいと思えば，思うほど流線網を描かなければ得られない結果に疑問を持たれたものであるが，次に示す一次元化した浸透流の解が簡単に証明してくれた．

1.8 一次元化浸透流解析

これはデュピット (Dupuit) の仮定に基づき，不圧地下水の浸透流において地下水位の鉛直方向への低下量が水平方向への変化に比べて極めて小さいときに無視できるというものである．

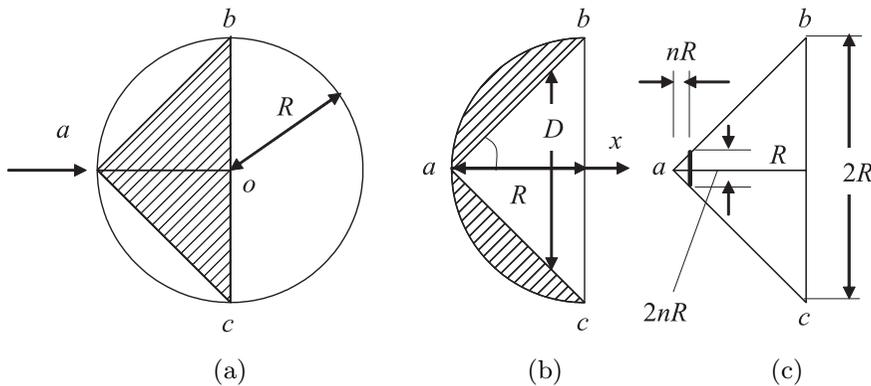


図 1.18 境界条件 その 1

そこで，図 1.18(a) に示す点 o を中心とした半径 R の円を描く，これが実際の流れの場である．そして，その半分の面積にある三角形 abc を一次元化した流れの場とする．当然，図 1.18(b) の斜線部分是不透水領域であり，この分だけ流れの場が減少しデュピットの仮定を満足する流れが生じているとすれば，図 1.18(b), (c) の記号を使って透水係数は以下のようにして求められる．なお， n は開口幅と直径との比を表す．

$$q = -kD \frac{dh}{dx} \quad (1.51)$$

ここで， $D = 2 \tan \theta x$ $\theta = 45^\circ$ であるから $D = 2x$ となり，境界条件を次のようにとると，

$$\begin{aligned} x = nR &\rightarrow h = H \\ x = R &\rightarrow h = H/2 \end{aligned} \quad (1.52)$$

式 (1.51) を変数分離して，式 (1.52) を代入して積分すると，

$$\begin{aligned}
 dh &= -\frac{q}{2xk} dx \\
 h &= -\frac{q}{2k} \ln x + C \\
 C &= -\frac{q}{2k} \ln nR + H \\
 \frac{H}{2} &= -\frac{q}{2k} \ln R - \frac{q}{2k} \ln nR + H \\
 \frac{H}{2} &= \frac{q}{2k} \ln \frac{R}{nR} \\
 k &= \frac{q}{H} \ln \frac{1}{n}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

式 (1.50) と式 (1.53) 比較すると α は $\ln n^{-1}$ に対応していることがわかる。

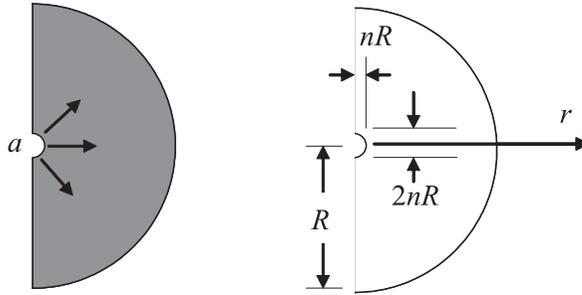


図 1.19 境界条件 その 2

次に，図 1.19 に示す，半径 nR の半円部分から水が湧き出す流れを考える．これは求めたい流れとは違う対比するための流れの場を指し，単位奥行き当たりの流量は次のようになり，

$$q = -\pi r v = -\pi r k \frac{dh}{dr} \tag{1.54}$$

式 (1.54) を積分して，式 (1.52) の境界条件を与えると，

$$\begin{aligned}
 dh &= -\frac{q}{\pi rk} dr \\
 h &= -\frac{q}{\pi k} \ln r + C \\
 C &= -\frac{q}{\pi k} \ln nR + H \\
 \frac{H}{2} &= \frac{q}{\pi k} \ln R + \frac{q}{\pi k} \ln nR \\
 \frac{H}{2} &= \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{nR} \\
 k &= \frac{q}{H} \ln \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{\pi}
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

α は $\ln n^{-1} \cdot 2/\pi$ に対応していることがわかる．式 (1.53) と式 (1.55) の α 部分の n を変化させて描いたのが図 1.20 である．また，図中の \circ は等角写像理論による理論解，差分や境界要素法などの数値解，電気アナログ法から得られたポテンシャルから流線網を描いたときの形状係数 α をプロットしてある．多大な労力を費やして得た結果が，一次元化浸透流の簡単な数式を解くことにより精度よく得られることが判る．工学的な判断には十分な結果が容易に得られることを知ってほしい．

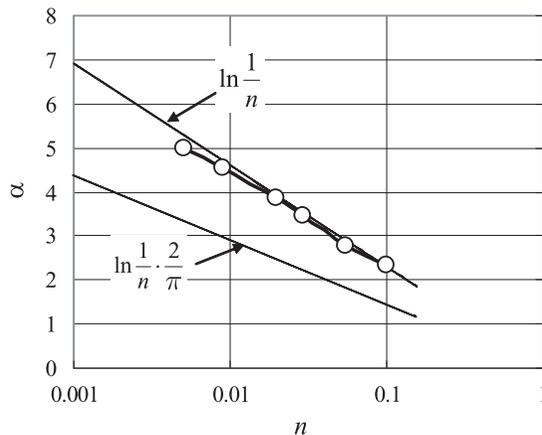


図 1.20 一次元化浸透流と二次元の数値解析結果との比較