第 6 章

微分法の基礎

6.1　微分係数と導関数

連続な関数 $y = f(x)$ を考える．x が a から $a+h$ に変化したとき，関数の値は $f(a)$ から $f(a+h)$ に変化する．このとき y の変化分を x の変化分で割った

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は，平均的な変化の割合となり，平均変化率と呼ばれる．図 6.1 に示すように，平均変化率は関数を表す曲線上の 2 点 A，B を直線で結んだとき，その直線の傾きを表す．

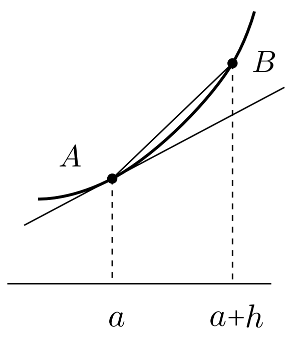


図 6.1

ここで h を 0 に近づけてみよう．このとき，点 B は点 A に近づくから，平均変化率は曲線の上の点 A における接線の傾きに近づき，$h \to 0$ の極限で接線の傾きに一致すると

考えられる．この接線の傾きを $f'(a)$ と記すことにすれば，

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{6.1}$$

となる．この $f'(a)$，すなわち点 A での接線の傾きを関数 $f(x)$ の点 $x = a$ における微分係数と呼んでいる．

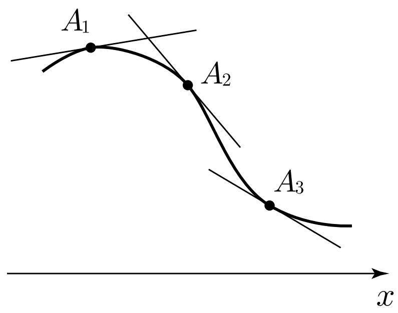


図 6.2

以下，ある区間で微分係数が存在する場合を考える．そのような場合を微分可能と呼ぶ．微分係数は接線の傾きを表し，図 6.2 に示したような曲線では点 A の位置が変化するとそれに応じて値も変化する．すなわち，微分係数は場所 x の関数と見なすことができる．微分係数をこのような見方をした場合を，その微分係数をもとの関数の導関数と呼び

$$f'(x), \quad \frac{df}{dx}$$

などの記号を用いる．導関数を求めるには定義式を用いて計算したあと文字を変数とみなせばよい．

例題 6.1 ....

x^2 を定義にしたがって微分せよ．

[解]

$$\frac{dx^2}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

....

このように，多くの場合は「h で割り算してから h を 0 とすればよい」が，この方法ではうまくいかないこともある．

例題 6.2 ....

$\sin x$ を定義にしたがって微分せよ．

[解]

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}2\frac{\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}=\cos x$$

ただし，

$$\lim_{h\to 0}\sin(h/2)/(h/2)=1\ (\text{例題 5．5(1)})$$

を用いた．

....

その他，初等関数の導関数を表 6.1 にまとめておく．

表 6.1

$f\ (x)$	$f'\ (x)$	備考
x^a	$\alpha x^{\alpha-1}$	
a^x	$a^x \log a$	$a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	x：ラジアン
$\cos x$	$-\sin x$	〃
$\tan x$	$\sec^2 x$	〃
$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$	〃
$\sec x$	$\sec x \tan x$	〃
$\mathrm{cosec} x$	$-\mathrm{cosec} x \cot x$	〃
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}$ は主値
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	〃
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	〃
$\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	〃
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	〃
$\mathrm{cosec}^{-1} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	〃

導関数をひとつの関数とすれば，その導関数も考えられる．これを 2 階導関数と呼び

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

などと記す．したがって，

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

である．2 階導関数を求めることを 2 階微分すると呼ぶ．関数が連続であっても微分できないことがあったように，導関数が連続であっても微分できないことがある．したがって，ある関数が微分できても，2 階微分できるとは限らない．

なお，3 階微分，4 階微分，・・・も同様に定義できる．

6.2　微分の公式

本節で述べる公式を用いれば，代表的な関数の導関数を用いて，いろいろな関数の導関数を計算することができる．

6.2.1　和と差の導関数

a, b を定数，$f(x), g(x)$ を微分可能な関数とする．このとき

$$\frac{d(af(x)+bg(x))}{dx} = a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx} \tag{6.2}$$

となる．このことは，定義を使えば

$$\begin{aligned}\frac{d(af(x)+bg(x))}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h)+bg(x+h)-af(x)-bg(x)}{h}\\ &= a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + b\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx}\end{aligned}$$

となることからわかる．特に $a=b=1$ または $a=1, b=-1$ ととれば

$$\frac{d(f(x)\pm g(x))}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \tag{6.3}$$

となる．また 3 つ以上の関数に対しても，たとえば 3 つの場合，すなわち $af(x)+bg(x)+ch(x)$ の場合 $af(x)+bg(x)=r(x)$ と考えて，式 (6.2) を繰り返して用れば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x)+ch(x)) = \frac{d}{dx}(r(x)+ch(x)) &= \frac{dr(x)}{dx} + c\frac{dh(x)}{dx}\\ &= a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx} + c\frac{dr}{dx}\end{aligned}$$

が成り立つ．

6.2.2　積と商の導関数

$f(x), g(x)$ を微分可能な関数（商のときは $g(x)\neq 0$）とする．このとき，

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{6.5}$$

が成り立つ．このことは，積の場合は

$$\begin{aligned}
(fg)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

のようにして示すことができる．商については

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= -\frac{g'}{g^2}
\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'}{g^2} \tag{6.6}$$

であるから，商を $f(x) \times 1/g(x)$ と考えて，式 (6.4) を使えばよい．

6.2.3　合成関数の導関数

y が x の関数 $\xi = g(x)$ で，さらに y が ξ の関数 $y = f(\xi)$ であるとする．x が変化したとき，ξ が変化し，またそれに応じて y が変化するため，y は x の関数とみなせる．この関数を g と f の合成関数とよび，

$$z = f(g(x))$$

と記すことはすでに 5.1 節で述べた．この関数 y を x で微分してみよう．x が $x+h$ にわずかに変化したとき，$\xi = g(x)$ は $g(x+h)$ にわずかに変化し，また y も $f(g(x))$ から

$f(g(x+h))$ にわずかに変化する．したがって

$$\begin{aligned}\frac{df(g(x))}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = \frac{df}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} \qquad (6.7)\end{aligned}$$

となる．この公式を合成関数の微分法という．

例題 6.3 ……………………………………………………………………

$\sin(x^2)$ を x で微分せよ．

[解]

$\xi = x^2$ とおけば，$y = \sin\xi$．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \cos\xi(2x) = 2x\cos x^2$$

……………………………………………………………………………

6.2.4　逆関数の導関数

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は前章で述べたように

$$f(y) = f(f^{-1}(x)) = x$$

を満足する．そこで，上の式を x で微分すると合成関数の微分法から

$$1 = \frac{df}{dx} = \frac{df/dy}{dy/dx} = \frac{dx/dy}{dy/dx}$$

となる．したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \quad \text{または} \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \qquad (6.8)$$

が得られる．ただし，$g'(y) \neq 0$ とする．この公式を逆関数の微分法という．

例題 6.4 ……………………………………………………………………

$y = \log x$ の導関数

[解]

$y = \log x$ の逆関数は $x = e^y$ であり，このとき $dx/dy = e^y = x$．したがって，

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{x}$$

……………………………………………………………………

6.2.5　パラメータを含んだ関数の導関数

x, y が t の関数で

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

であるとする．このとき，$t = f^{-1}(x)$ であるから，$y = g(f^{-1}(x))$ となり，y は x の関数となる．そして，y を x で微分すれば，合成関数および逆関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{d(f^{-1})}\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{dg}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{6.9}$$

となる．

例題 6.5 ……………………………………………………………………

$x = a\cos t$，$y = b\sin t$（ただし，a，b は 0 でない定数）のとき dy/dx を求めよ．

[解]

$$dx/dt = -a\sin t, \quad dy/dt = b\cos t$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

……………………………………………………………………

6.3　平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能であるとする．この関数が区間内の点 $x=a$ で最大値または最小値をとったとすれば，$f'(a)=0$ が成り立つ．なぜなら，図 6.3 に示すように最大値を含む微小区間で接線の傾きは正から負に変化する．この区間は任意に小さくできるため，最大値の場所で接線の傾きが 0 になると結論できる．最小値の場合は接線の傾きが負から正になるため，やはり最小値の場所で接線の傾きは 0 である．

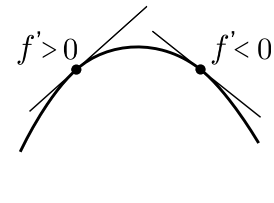


図 6.3

この事実を用いると次の定理（ロルの定理）が証明できる．

関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ において連続で区間 (a,b) で微分可能とする．このときもし $f(a)=f(b)=0$ であれば，$f'(x)=0$ を満足する x が区間 (a,b) に少なくともひとつある．

このことは図で考えれば明らかである．定理の仮定から $y=f(x)$ の形は図 6.4 のように点 $x=a, x=b$ で x 軸と交わっている．$f'(x)=0$ を満足するということは，その点での接線の傾きが 0 を意味するから，定理はこのような曲線には必ず x 軸と平行な接線が引けるといういわば当然の主張になっている．

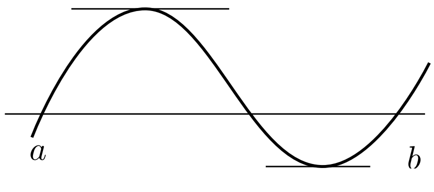


図 6.4

このロルの定理を用いれば，次の平均値の定理と呼ばれる重要な定理が証明できる．

「関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で区間 (a, b) で微分可能とする．このとき

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \tag{6.10}$$

を満足するような $x = c$ が区間 (a, b) に少なくともひとつ存在する」

この定理の意味も図を描けばはっきりする．すなわち，

$$(f(b) - f(a))/(b - a)$$

は図の点 A，B を通る直線の傾きである．そこで，平均値の定理は $y = f(x)$ に対して点 A，B の間でこの直線に平行な接線がに必ず引けることを主張している（図 6.5）．

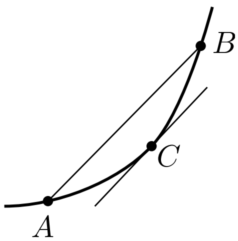


図 6.5

証明は次のようにする．

$$F(x) = f(b) - f(x) - k(b - x)$$

とおく．この関数は仮定から微分可能性等の条件を満たし，また $F(b) = 0$ も満たす．ここで

$$F(a) = 0$$

となるように，k を決めると

$$k = (f(b) - f(a))/(b - a)$$

となる．したがって，k としてこの値を用いれば，ロルの定理より $F'(x) = 0$ を満足する点 $x = c$ が区間内に存在する．一方，

$$F'(x) = -f'(x) + k$$

であるから

$$F'(c) = -f'(c) + k = 0$$

となるが，この式は証明すべき式と同一である．

平均値の定理はよく用いられるので少し変形しておこう．点 $x = c$ は $x = a$ と $x = b$ の間にあるから

$$c = a + (b - a)\theta \quad (0 < \theta < 1)$$

と書ける．このとき式 (6.10) は

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + (b - a)\theta) \quad (0 < \theta < 1) \tag{6.11}$$

となる．さらに $b = a + h$ とおけば

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + h\theta) \quad (0 < \theta < 1) \tag{6.12}$$

となる．式 (6.11) において，b を変数とみなして $b = x$ とおけば

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(c) \quad (a < c < x) \tag{6.13}$$

となるが，この式は関数 $f(x)$ を 1 次関数で近似している式とみなすことができる．そして，微分係数とは 1 次式で近似したときの x の係数であるといえる．

平均値の定理を拡張すれば次の定理が得られる．

「関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で，$f(x)$，$f'(x)$ が区間 (a, b) で微分可能とする．このとき

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 f''(c) \tag{6.14}$$

を満足するような $x = c$ が区間 (a, b) に少なくともひとつ存在する」

証明は平均値の定理と同様にできる．すなわち，

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - k(b - x)^2 \tag{6.15}$$

とおけば，この関数は区間 (a, b) で 2 階微分可能（$f(x)$，$f'(x)$ が微分可能なこと）であり，また $F(b) = 0$ を満たす．ここで

$$F(a) = f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) - k(b - a)^2 = 0$$

となるように k を選ぶ（上式を k について解けばよい）と，ロルの定理から

$$F'(c) = 0$$

を満足する c が区間 (a,b) に存在する．一方，

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b - x)f''(x) + 2k(b - x)$$

であるから

$$0 = -(b-c)f''(c) + 2k(b-c)$$

となるため，この式を k について解いて式 (6.15) に代入すれば，証明すべき式が得られる．

平均値の定理と同様，上の定理の関係式は

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a + (b-a)\theta) \quad (0 < \theta < 1) \tag{6.16}$$

または

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a + h\theta) \quad (0 < \theta < 1) \tag{6.17}$$

となる．式 (6.16) で $b = x$ とおけば

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(c) \tag{6.18}$$

となるが，このことから 2 階微係数は，関数を 2 次式で近似したときの 2 次の項の係数になっていることがわかる．

6.4　微分法の応用

微分は多方面で利用されるが，本節ではその中で，微分を利用して関数の概形を描く方法を紹介する．

まず，$y = f(x)$ に対して，$f'(a) > 0$ であればその関数は a の近くで単調増加している．このことは，式 (6.13) から関数が a の近くで一次関数で表され，その傾きが正であることからわかる．同様に $f'(a) < 0$ であればその関数は a の近くで単調減少している．$f'(a)$ が符号を変化させるとき，関数は増加から減少に，あるいは減少から増加に転ずる．いいかえれば，関数が x で極大値または極小値をとれば $f'(x) = 0$ を満たす．その点が極大値であるか極小値であるかは 2 階微分係数を用いて判断できる．前述のとおり，2 階微分係数は，関数を 2 次関数で近似したときの 2 次の項の係数になっている（式 (6.18)）．放物線を思い出せば，その係数が正ならば下に凸，負ならば上に凸になる．したがって，$f'(x) = 0$ を満たす点において $f''(x) > 0$ ならば極小値，$f''(x) < 0$ ならば極大値となる．このようなことを用いれば曲線の概形を描くことができる．

例題 6.6 ………………………………………………………………………………

曲線 $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$ の極値を求め，曲線の概形を描け．

[解]

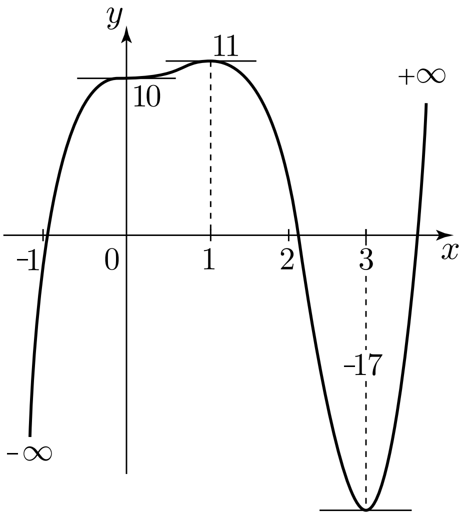
$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-1)(x-3)$$

であるから，$y' = 0$ を満たす点は，$x = 0$，または 1，または 3 である．f' の符号を調べて増減表を書けば表 6.2 のようになる．したがって，$x = 1$ のとき極大値 11 をとり，$x = 3$ のとき極小値 −17 をとることがわかる．ただし，$x = 0$ は極大値でも極小値でもない[*1]．さらに $x \to -\infty$ のとき，$y \to -\infty$ であり，$x \to \infty$ のとき，$y \to \infty$ である．以上のことを考慮して概形を描けば図 6.6 のようになる．

[*1] $f'(x) = 0$ は極大値または極小値をとるための必要条件であって，$f'(x) = 0$ の根がすべて $f(x)$ を極大または極小にするとは限らない

表 6.2

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\nearrow$	11	$\searrow$	-17	$\nearrow$	$+\infty$



y=x^5-5x^4+5x^3+10

図 6.6

例題 6.7 ....

曲線 $y = 2\sin x + \sin 2x$ の概形を描け．ただし，$0 \leq x \leq 2\pi$ とする．

[解]

$$y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

したがって，$y' = 0$ を満たす点は $\cos x = 1/2$ または $\cos x = -1$，すなわち $x = \pi/3$, π，$5\pi/3$．極大値は $x = \pi/3$ のとき $3\sqrt{3}/2$ であり，極小値は $x = 5\pi/3$ のとき $-3\sqrt{3}/2$

である．これらのことと $1 + \cos x \geq 0$ を考慮して増減表を書けば表 6.3 のようになる．また曲線の概形は図 6.7 のようになる．

表 6.3

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5}{3}\pi$		2π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

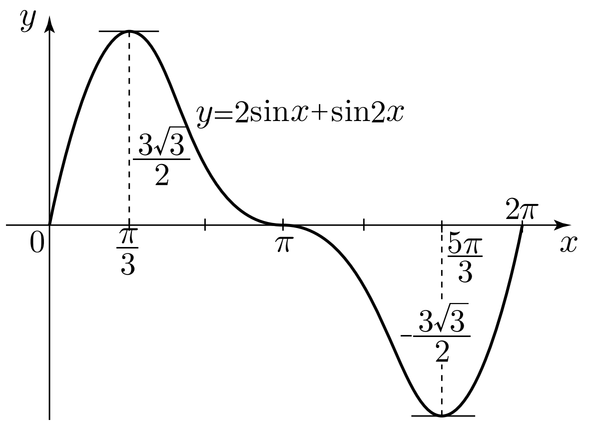


図 6.7

. . . .