第 1 章

順列と組合せ

1.1　順列

1.1.1　場合の数の求め方

有限の離散標本空間に関る確率の問題などでは，標本の集合や，部分集合を数える作業が生じる．

場合の数を，もれなく，重複もなく，順序正しく数える方法を知る必要がある．

和の法則

白黒 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が 5 の倍数になる場合の数を求めると目の和が 5 になるときが 4 通りあり，目の和が 10 になるときが 3 通りある．したがって，目の和が 5 の倍数になる場合の数は

$$4 + 3 = 7$$

の 7 通りとなる．

同時には起こらない 2 つのことがら，A，B があって，A の起こり方が m 通り，B の起こり方が n 通りあるとした場合，A，B のどちらかが起こる場合の数は

$$(m + n)\text{ 通り}$$

であり和の法則という．

和の法則は，3 つ以上のことがらについても成り立つ

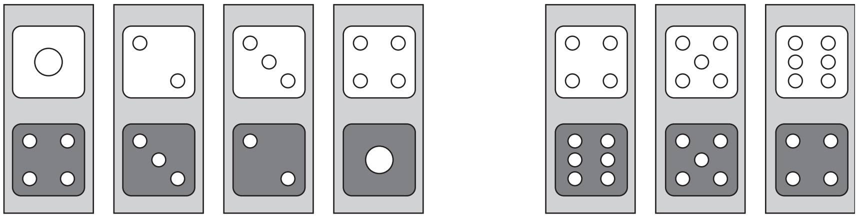

図 1.1　白黒 2 個のさいころの目の和が 5 の倍数になる場合

積の法則

いま，ある河川に橋梁を架ける計画がある．ルート案として a 案，b 案，c 案の 3 案があり，それぞれについて橋脚の数が 3 本，4 本の 2 ケースが提案されている．このときすべての検討ケースは

$$3 \times 2 = 6$$

の 6 ケースとなる．

2 つのことがら，A，B があって，A の起こり方が m 通りあり，そのおのおのについて B の起こり方が n 通りあるとすれば，A，B がともに起こる場合の数は

$$m \times n \text{ 通り}$$

でありこれを積の法則という．

積の法則は，3 つ以上のことがらについても成り立つ．

例えば，上記の計画で現況の橋梁が存在した場合と撤去した場合などの水理影響検討が必要な場合など水理解析ケースは

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

となる．

一般に，2 つの集合 A，B について A の要素 x と B の要素 y の組（x，y）の全体が作る集合を A と B の直積といい，$A \times B$ で表す．

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A,\ y \in B\}$$

有限集合 A，B の直積の要素の個数について，次の式が成り立つ．

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

1.1.2　順列

♠，♥，♦，♣ のマークを 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある．このうちの 3 枚を取り出して並べるとき，何通りの並べ方ができるかを調べる．

カードの並べ方は全部で図 1.2 のようになる．

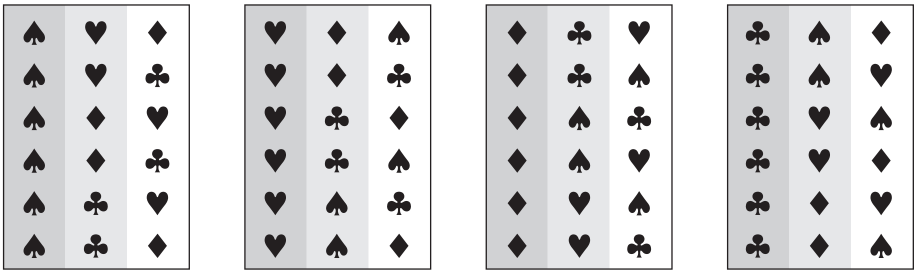

図 1.2　カードの並べ方

これから，24 通りの並べ方ができることがわかる．

この問題を次のように考える．

左の欄は，♠，♥，♦，♣ のどれでもよいから並べ方は 4 通り．まん中の欄は，左の欄に並べたカードを除いた 3 個のカードのうちのどれでもよいから並べ方は 3 通り．さらに，右の欄は，残った 2 個のカードから 1 個のカードを選んで並べればよいから並べ方は 2 通りある．

したがって，積の法則により

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

の 24 通りの並べ方が得られる．

一般に，$0 < r \leqq n$ のとき，異なる n 個のものから r 個を取って 1 列に並べたものを，n 個のものから r 個を取る順列といい，この順列の総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．

上記では，4 個のものから 3 個を取る順列の数 ${}_4\mathrm{P}_3$ を求めたことになる．

いま，同じようにして，一般の ${}_n\mathrm{P}_r$ を求めると，r 個の場所を考えて n 個のうちの r 個を左から順に並べることにする．

1 番目の場所への並べ方は n 通りある．そのおのおのに対して，2 番目の場所への並べ方は，残った（$n-1$）個からどれを並べてもよいから（$n-1$）通りある．以下同様にして，r 番目への場所の並べ方は $\{n-(r-1)\}$ 通り，つまり $(n-r+1)$ 通りある．

したがって，積の法則から，次の結果が得られる．

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\ \text{個の自然数の積}} $$

とくに，n 個から r 個を取る順列の数は，上式で $r=n$ とおいて

$$ {}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 $$

となる．上式の右辺のように，1 から n までの連続した自然数の積を n の階乗といい，$n\,!$ で表す．

$r<n$ のとき，${}_n\mathrm{P}_r$ 式は次のように変形できて，

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots 2\cdot 1}{(n-r)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n\,!}{(n-r)\,!} \end{aligned} $$

となる．

ここで，$0\,!$ は意味をもたないが，$0\,!=1$ と定めると，上式は $r=n$ のときにも成り立つ．

順列の数（PERMUT） ....

■機能概要

あるデータから指定された個数を順序の違いを考慮して対象や事象の組合せの数（順列の数）を返す．順序は関係なく計算される数（組合せ）とは異なり，例えば A と B を抜き出すときに，A と B の順序の違いを考慮して数に数える．

$[n]$ をデータの総数である「標本数」，$[k]$ を「抜き取り数」として，PERMUT 関数を数式で表現すると，次のようになる．

$$\mathrm{PERMUT} = npk = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

■書式・使用例

PERMUT(標本数，抜き取り数)

[標本数]　抜き取りを行う標本の総数を整数で指定する．
[抜き取り数]　標本から抜き取りを行う数を整数で指定する．

いずれの引数も，数値，数値を表す文字列，セル参照を指定し，整数でない値を指定すると，小数点以下が切り捨てられる．

以下に，20 個の中から 1 ～ 19 個を取り出す順列を計算する手順を示し，表およびグラフを図 1.3 に示した．2 つのグラフのうち上のグラフは両軸とも算術メモリをとってあり，上のグラフは縦軸に対数メモリをとって表示している．

エクセルの関数を使用する方法はいくつかあるが，ここではコンボボックスを使った場合を示した．

① 「D2」のセルを選択し「関数の貼り付け」アイコンをクリックする．
② 「統計」の中から PERMUT 関数を選択する．
③ 標本数に「B2」抜き取り数に「C2」と入力する．
④ 「D2」の右下をドラッグして「D20」まで持っていく．

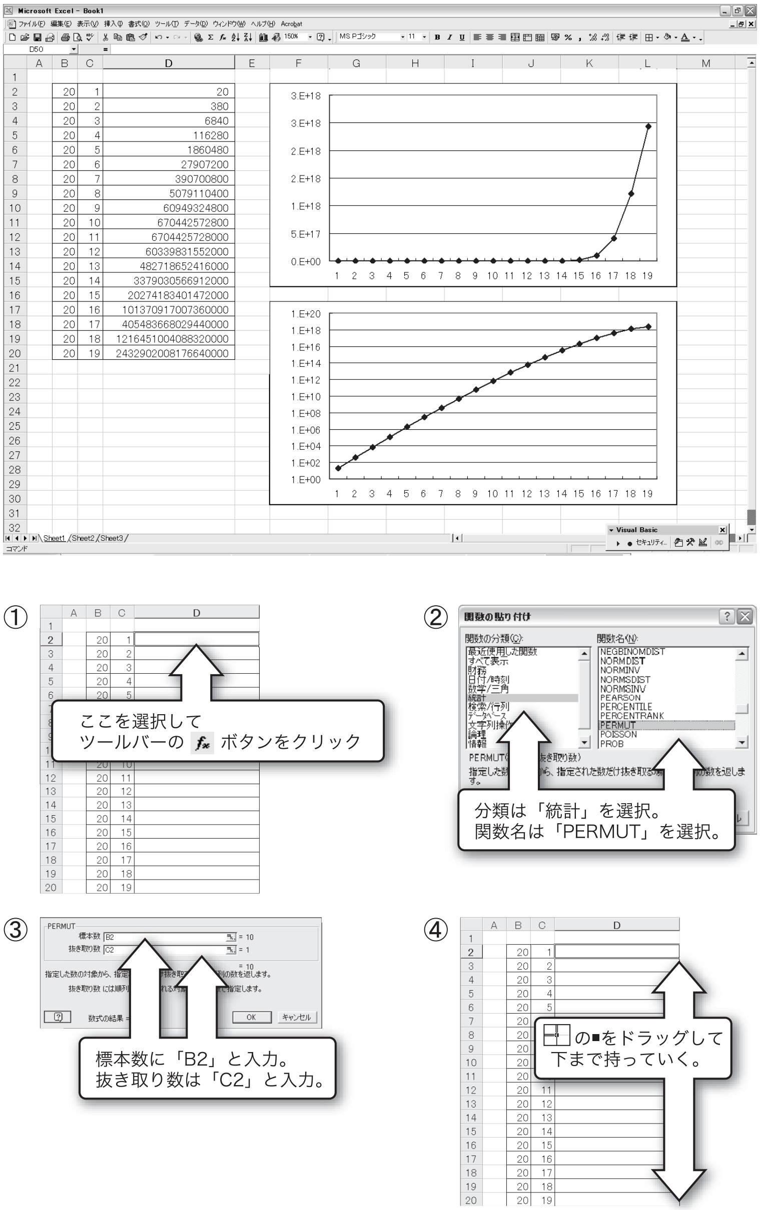

図 1.3　PERMUT 関数の使用例

数値の階乗（FACT）

■機能概要

引数 [数値] の階乗 (1〜引数 [数値] の範囲にある整数の積) を返す.

■書式・使用例

FACT(数値)

[数値]　階乗を求める正の数値，または正の数値が入力されているセルを指定する．範囲や範囲名は指定できない．整数でない値を指定すると，小数点以下が切り捨てられる.

以下に 5 の階乗を直接セルに FACT 関数を入力して求めた例を示す．セル C3 に「=FACT(5)」と入力してエンタキーを押す．当然 $5\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ となる.

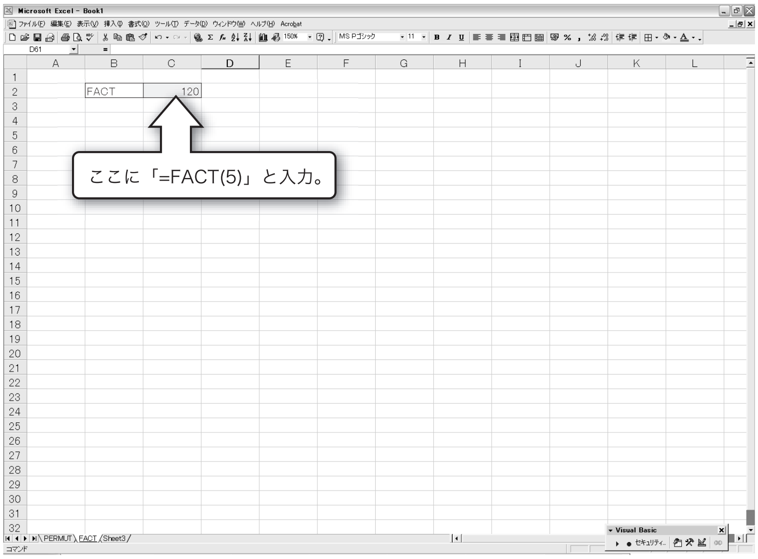

図 1.4　FACT 関数の使用例

重複順列

♠，♥，♦，♣ の 4 種類のカードから，同じものをくり返し取ることを許して 2 組のカードを並べれば，次の 16 通りの並べ方が得られる．

♠♠　♠♥　♠♦　♠♣　♥♠　♥♥　♥♦　♥♣
♦♠　♦♥　♦♦　♦♣　♣♠　♣♥　♣♦　♣♣

このように，同じものをくり返し取ることを許して 1 列に並べたものを重複順列という．

n 種類のものから重複を許して r 個を取る重複順列の数は

$$n^r$$

となる．

円順列

n 個の異なるものを円形に並べる配列を円順列といい，回転によって重なるものは，すべて同じ並び方と考える．

異なる n 個のものを円形に並べる円順列の数は

$$(n-1)\,!$$

となる．

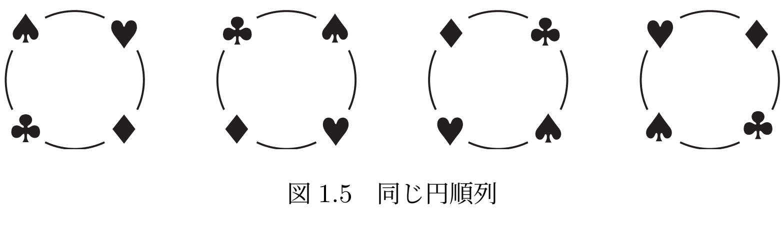

図 1.5　同じ円順列

同じものを含む順列

$\spadesuit$ が 3 個，$\heartsuit$ が 2 個，$\diamondsuit$ が 2 個の計 7 文字を全部並べて作られる順列の数を求めよう．

求める順列の数を x とし，このうちの 1 つ，たとえば

$$\spadesuit\ \spadesuit\ \heartsuit\ \spadesuit\ \diamondsuit\ \heartsuit\ \diamondsuit$$

について考える．(1.4) において，3 個の $\spadesuit$，2 個の $\heartsuit$，2 個の $\diamondsuit$ の間でそれぞれ入れかえても，その並び方は変わらない．

ここで仮に，3 個の $\spadesuit$ を $\spadesuit_1$，$\spadesuit_2$，$\spadesuit_3$，2 個の $\heartsuit$ を $\heartsuit_1$，$\heartsuit_2$，2 個の $\diamondsuit$ を $\diamondsuit_1$，$\diamondsuit_2$ とそれぞれ区別すると，1 通りの並び方 (1.4) から

$$3\,! \times 2\,! \times 2\,!$$

通りの並び方ができる．

このことを求める順列のおのおのについて考えれば，x 通りの並び方から

$$(3\,! \times 2\,! \times 2\,!) \times x$$

通りの並び方ができる．これが ${}_7\mathrm{P}_7$ ！に等しいから

$$(3\,! \times 2\,! \times 2\,!) \times x = 7\,! \qquad \text{つまり} \quad x = \frac{7\,!}{3\,!\,2\,!\,2\,!} = 210$$

よって，求める順列の数は 210 通りである．

異なる n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は他の同じもの，r 個はまた他の同じもの，$\cdots$ であるとき，これらの n 個のものを 1 列に並べる順列の数は

$$\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!\cdots}$$

となる．ただし，$p + q + r + \cdots = n$

1.2　組合せ

1.2.1　組合せ

集合 $\{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit,\ J_k\ \}$ の 5 個の要素の中から 3 個の要素を選んで部分集合を作るとき，順序正しく整理すると

$$\{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit\ \},\ \{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \clubsuit\ \},\ \{\spadesuit,\ \heartsuit,\ J_k\ \},\ \{\spadesuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit\ \},\ \{\spadesuit,\ \diamondsuit,\ J_k\ \},$$

$$\{\spadesuit,\ \clubsuit,\ J_k\ \},\ \{\heartsuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit\ \},\ \{\heartsuit,\ \diamondsuit,\ J_k\ \},\ \{\heartsuit,\ \clubsuit,\ J_k\ \},\ \{\diamondsuit,\ \clubsuit,\ J_k\ \},$$

の 10 個が得られる．

順列の考え方からもこの選び方の総数を求めることができる．たとえば，1 つの部分集合 $\{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit\}$ に対して，要素$\spadesuit$，$\heartsuit$，$\diamondsuit$を 1 列に並べると

$$\spadesuit\heartsuit\diamondsuit,\ \spadesuit\diamondsuit\heartsuit,\ \heartsuit\spadesuit\diamondsuit,\ \heartsuit\diamondsuit\spadesuit,\ \diamondsuit\spadesuit\heartsuit,\ \diamondsuit\heartsuit\spadesuit$$

のように，1 つの選び方から 3 ! 通りの順列が得られる．

5 個の要素の中から 3 個の要素を選ぶときの選び方の総数を x とすると，どの 1 つの選び方からも 3 ! 通りの順列が得られるから，x 通りの選び方からは $3\,! \times x$ 通りの順列が得られる．

この順列の数は ${}_5\mathrm{P}_3$ に等しいから

$$3\,! \times x = {}_5\mathrm{P}_3$$

となる．よって

$$x = \frac{{}_5\mathrm{P}_3}{3\,!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

となり，最初に順序正しく整理した結果と一致している．

一般に，$0 < r \leqq n$ のとき，異なる n 個のものから r 個を選んで作った部分集合を，n 個のものから r 個を取る組合せといい，この組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す．

5 個のものから 3 個を取る組合せの数 ${}_5\mathrm{C}_3$ を求めたことになる．

同様にして，一般の ${}_n\mathrm{C}_r$ についても

$$r\,! \times {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{P}_r$$

の関係が成り立つから，組み合わせの数は

$$
{}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r\,!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,!} = \frac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}
$$

となる．ここで，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$ と定めると上の式は $r = 0$ のときにも成り立つ．

組み合わせの数（COMBIN）

■機能概要

すべての項目から指定された個数を選択するときの組み合わせ数を返す．階乗を使って表すと，次の式になる．

複数の項目をグループ化するとき，作成できるグループの数などを計算する．

$$nCk = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{nPk}{k!}$$

[n] を [引数]，[k] を引数 [抜き取り数] とする．

■書式・使用例

COMBIN(総数，抜き取り数)

[総数]　対象の項目の総数を指定する．

[抜き取り数]　組み合わせ 1 組に含まれる項目の数を指定する．

引数には，セル参照を指定することもできる．なお，整数でない値を指定すると，小数点以下が切り捨てられる．

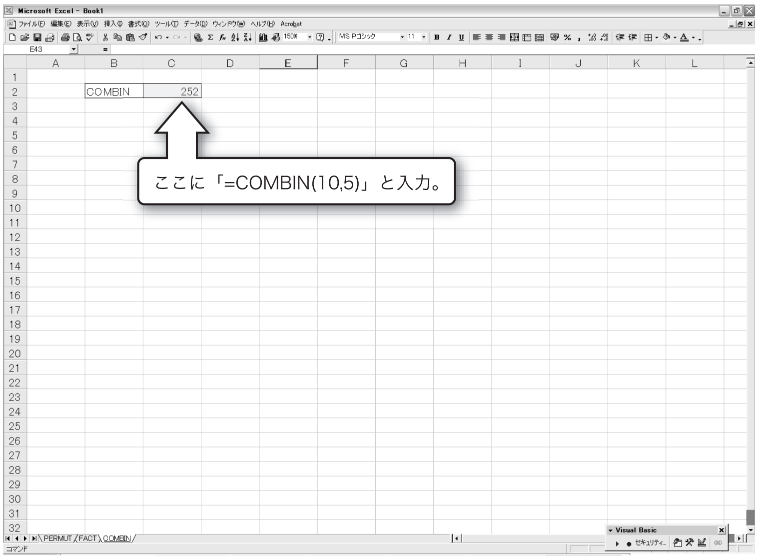

図 1.6　COMBIN 関数の使用例

1.2.2　2 項定理

パスカルの三角形

n が自然数のとき，$(a+b)^n$ の展開式を求めると，この式 $(a+b)^n$ において

$$\begin{aligned} n=2 \text{ のとき} \qquad & (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ n=3 \text{ のとき} \qquad & (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{aligned}$$

であり，これより，$(a+b)^4$ の展開式を求めると，次のようになる．

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\ &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b) \\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \end{aligned}$$

となる．

よって

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$(a+b)^n$ の展開式において，$n=1$，$n=2$，$n=3$，$n=4$，$n=5\cdots$ のときの係数を並べると，図 1.7 のようになる．

$$\begin{array}{lccccccccccc} n{=}1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\ n{=}2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ n{=}3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ n{=}4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ n{=}5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

図 1.7　パスカルの三角形

これをパスカルの三角形といい，1 つの段の隣りあった 2 数を加えたものが，その下の段の間にある数になっている．

2 項定理

組合せの考えを用いて，直接 $(a+b)^n$ の展開式を求めると，例えば，$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の係数を調べよる．いま，

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

の右辺の 4 個の因数 $(a+b)$ のうち，1 個から b を取り，他の 3 個から a を取ってかければ a^3b の項が 1 つ得られるので，a^3b の係数は，4 個の因数 $(a+b)$ から 1 個の b を選ぶ組合せの数 ${}_4\mathrm{C}_1$ に等しくなる．

同様にして考えていくと，一般に，$(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ であり，次の展開の公式が得られる．これを 2 項定理という．

$$\begin{aligned}(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 \cdots \\ + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n\end{aligned}$$

上式において，右辺の各項の係数 ${}_n\mathrm{C}_0, {}_n\mathrm{C}_1, {}_n\mathrm{C}_2, \cdots, {}_n\mathrm{C}_r, \cdots, {}_n\mathrm{C}_{n-1}, {}_n\mathrm{C}_n$ を 2 項係数といい，右辺の $(r+1)$ 番目の項 ${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の一般項という．

また，

$${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

であるから，展開式の $a^{n-r}b^r$ と a^rb^{n-r} の係数は等しく，さらに

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_{n-1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r$$

が成り立つことから，2 項係数の関係は図 1.8 のようになり，パスカルの三角形を表している．

$n=1$　${}_1\mathrm{C}_0$ ${}_1\mathrm{C}_1$

$n=2$　${}_2\mathrm{C}_0$ ${}_2\mathrm{C}_1$ ${}_2\mathrm{C}_2$

$n=3$　${}_3\mathrm{C}_0$ ${}_3\mathrm{C}_1$ ${}_3\mathrm{C}_2$ ${}_3\mathrm{C}_3$

$n=4$　${}_4\mathrm{C}_0$ ${}_4\mathrm{C}_1$ ${}_4\mathrm{C}_2$ ${}_4\mathrm{C}_3$ ${}_4\mathrm{C}_4$

$n=5$　${}_5\mathrm{C}_0$ ${}_5\mathrm{C}_1$ ${}_5\mathrm{C}_2$ ${}_5\mathrm{C}_3$ ${}_5\mathrm{C}_4$ ${}_5\mathrm{C}_5$

$\cdots$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

図 1.8　$(a+b)^n$ の展開式の係数