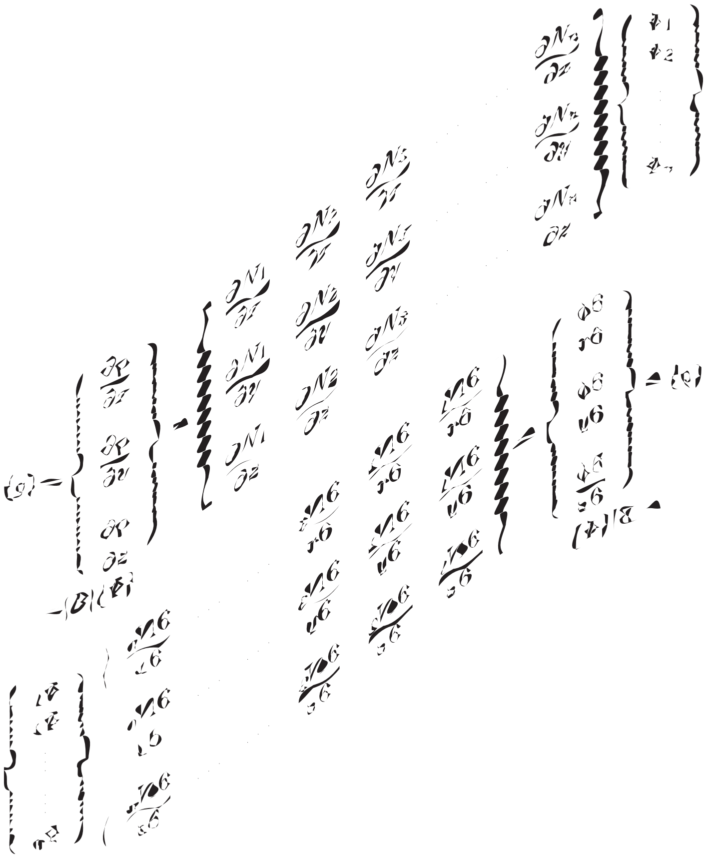
第 1 章

浸透流の解析方法



1.1　3 次元の浸透流

3 次元帯水層の流れに対する支配偏微分方程式は

$$K_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + Q = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{1.1}$$

である．境界条件は既知の値からなり

$$S_1 \text{上}：\phi = \phi_B \quad \text{（境界上で水頭}\phi_B\text{が与えられる）} \tag{1.2}$$

$$S_2 \text{上}：K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} l_y + K_z \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z + \bar{q} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} + \bar{q} = 0 \tag{1.3}$$

となる．ここで

K_x, K_y, K_z：x, y, z 軸方向の透水係数
ϕ：ピエゾ水頭
Q：湧水量
$\bar{q}$：境界から流れ出る水
λ：貯留係数

である．

式 (1.1) を境界条件式 (1.2)，式 (1.3) のもとで解くことは，次式の汎関数を最小にすることと等価である．

$$I = \int_V \frac{1}{2} \left\{ K_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + K_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(Q - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right\} dV + \int_S \bar{q} \phi dS \tag{1.4}$$

いま，

$$\{g\} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right\}, \quad \{g\}^T = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\}, \quad [D] = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

とするとき，式 (1.4) は

$$
\begin{aligned}
I &= \int_V \frac{1}{2}\left[\{g\}^T[D]\{g\} - 2\left(Q - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\phi\right]dV + \int_S \bar{q}\phi dS \\
&= \int_V \frac{1}{2}\{g\}^T[D]\{g\}dV - \int_V \left(Q - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\phi dV + \int_S \bar{q}\phi dS
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

となる．要素内のピエゾ水頭 ϕ は次のように表現する．

$$
\phi(x,y,z,t) = [N(x,y,z)]\{\Phi(t)\} \tag{1.6}
$$

ここで，$[N]$ は節点の状態量と要素内の状態量を結びつける形状関数マトリックスであり，$\{\Phi(t)\}$ は時刻 t における要素の節点状態量を示す．

$\{g\}$ を形状関数マトリックス $[N]$ で現わすと

$$
\{g\} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \dfrac{\partial N_3}{\partial z} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial N_n}{\partial z} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_n \end{array}\right\} \tag{1.7}
$$

$$
=[B]\{\Phi\} \tag{1.8}
$$

であり，式 (1.8) の $[B]$ はひずみ－変位マトリックスである．ピエゾ水頭 ϕ を形状関数を用いて現わすと，

$$
\Phi = N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2 + N_3\Phi_3 + \cdots\cdots + N_n\Phi_n \tag{1.9}
$$

となる．式 (1.5) の右辺をひずみ－変位マトリックス $[B]$ を用いると，

$$
\begin{aligned}
&\int_V \frac{1}{2}\{g\}^T[D]\{g\}dV = \int_V \frac{1}{2}\{\Phi\}^T[B]^T[D][B]\{\Phi\}dV \\
&\int_V \left(Q - \lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\phi dV = \int_V Q\phi dV - \int_V \lambda\frac{\partial\phi}{\partial t}\phi dV \\
&\qquad\qquad = \int_V Q[N]\{\Phi\}dV - \int_V \lambda[N]\{\Phi\}[N]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t}dV \\
&\int_S \bar{q}\phi ds = \int_S \bar{q}[N]\{\Phi\}ds
\end{aligned}
$$

となり，これらの式を式 (1.5) に代入して変形すると

$$I = \int_V \frac{1}{2}\{g\}^T[B]^T[D][B]\{\Phi\}dV - \int_V [N]\{\Phi\}QdV$$
$$+ \int_V \lambda[N]\{\Phi\}[N]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t}dV + \int_S \bar{q}[N]\{\Phi\}ds \tag{1.10}$$

となる．式 (1.10) を $\{\Phi\}$ で微分して最小化を求める．

$\{\Phi\}^T[A]\{\Phi\}$ を $\{\Phi\}$ で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\{\Phi\}^T[A]\{\Phi\}\right) = 2[A]\{\Phi\}$$

であることより，式 (1.10) の右辺第 1 項は

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_V \frac{1}{2}\{\Phi\}^T[B]^T[D][B]\{\Phi\}dV\right) = \int_V [B]^T[D][B]\{\Phi\}dV$$

右辺第 2 項は

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_V [N]\{\Phi\}QdV\right) = \int_V [N]^T QdV$$

右辺第 3 項は

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_V \lambda[N]\{\Phi\}[N]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t}dV\right)$$
$$= \int_V \left(\lambda[N]^T[N]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t} + \lambda[N]\{\Phi\}[N]^T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial\{\Phi\}}\right)\right)dV$$
$$= \int_V \lambda[N]^T[N]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t}dV$$

右辺第 4 項は

$$\frac{\partial}{\partial\{\Phi\}}\left(\int_S \bar{q}[N]\{\Phi\}ds\right) = \int_S \bar{q}[N]^T ds$$

よって

$$\frac{\partial I}{\partial\{\Phi\}} = \int_V [B]^T[D][B]\{\Phi\}dV - \int_V [N]^T QdV + \int_V \lambda[N]^T[N]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t}dV + \int_S \bar{q}[N]^T ds$$
$$= 0 \tag{1.11}$$

となる．以上から求められた式は

$$[C]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t} + [K]\{\Phi\} + \{F\} = 0 \tag{1.12}$$

となる．ただし，

$$[C] = \int_V \lambda [N]^T [N] dV \tag{1.13}$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV \tag{1.14}$$

$$\{F\} = \int_S \bar{q} [N]^T ds - \int_V [N]^T Q dV \tag{1.15}$$

である．

1.2　2 次元問題

これまでは 3 次元の場合について述べてきましたが，ここからは具体的な三角形一次要素を用いた 2 次元問題について述べる．

式 (1.12) から式 (1.15) を 2 次元におきかえると

$$[C]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t}+[K]\{\Phi\}+\{F\}=0 \tag{1.16}$$

$$[C]=\int_S \lambda[N]^T[N]ds \tag{1.17}$$

$$[K]=\int_S [B]^T[D][B]ds \tag{1.18}$$

$$\{F\}=\int_\Gamma \bar{q}[N]^T dl-\int_S [N]^T Q ds \tag{1.19}$$

となる．ただし

S：三角形要素領域
Γ: 要素領域を囲む境界線

である．

式 (1.16) から式 (1.19) において $\{\Phi\}$ が求められ，$\{\Phi\}$ を式 (1.16) に代入することにより，ピエゾ水頭 $\{\phi\}$ が求められる．

また，要素内に流れる速度成分 V_x, V_y は

$$\begin{aligned}V_x&=-K_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\\ V_y&=-K_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\end{aligned} \tag{1.20}$$

より求めることができ，

$$\left\{\begin{array}{c}V_x\\V_y\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cc}-K_x&0\\0&-K_y\end{array}\right][B]\{\Phi\}=-[D][B]\{\Phi\} \tag{1.21}$$

でもある．

以下，具体的に計算の手順を三角形一次要素で説明をする．

図 1.1 の三角形要素において，その中での状態量 ϕ を

$$\phi=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y$$

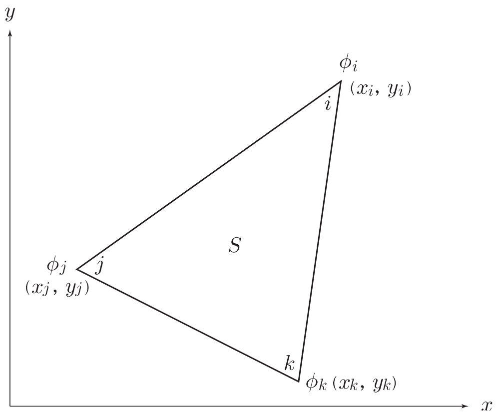


図 1.1

と仮定し，三角形要素の 3 節点 (i, j, k) に対する ϕ の節点量をスカラー量とし，それぞれの値を ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k とすると

$$
\begin{aligned}
\phi &= \left\{ \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2S} \quad \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2S} \quad \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2S} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{array} \right\} \\
&= [N_i\ N_j\ N_k] \left\{ \begin{array}{c} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{array} \right\} \\
&= [N] \left\{ \begin{array}{c} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{array} \right\}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

となる．ただし

$$
\begin{array}{lll}
a_i = x_j y_k - x_k y_i & a_j = x_k y_i - x_i y_k & a_k = x_i y_j - x_j y_i \\
b_i = y_j - y_k & b_j = y_k - y_i & b_k = y_i - y_j \\
c_i = x_k - x_j & c_j = x_i - x_k & c_k = x_j - x_i
\end{array}
$$

S は三角形要素の面積

である．式 (1.17) は

$$
[C] = \int_S \lambda [N]^T [N] ds = \lambda \int_S \left[\begin{array}{ccc} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_i^2 & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k^2 \end{array} \right] ds \tag{1.23}
$$

となる．式 (1.23) における積の項の計算は，面積座標に等しいことを利用すると次のように書くことができる．

$$N_i = L_1 \quad N_j = L_2 \quad N_k = L_3$$

したがって，式 (1.23) を面積座標で表すと

$$[C] = \lambda \int_S \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_2 & L_1L_3 \\ L_2L_1 & L_2^2 & L_2L_3 \\ L_3L_1 & L_3L_2 & L_3^2 \end{bmatrix} ds \tag{1.24}$$

となり，面積座標の面積分の公式

$$\int_S L_1^a L_2^b L_3^c ds = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \cdot 2S \tag{1.25}$$

から，式 (1.24) を計算すると

$$[C] = \frac{\lambda S}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \bar{q}[N]^T dl &= \int_\Gamma \bar{q} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dl \\ &= \int_\Gamma \bar{q} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dl \\ &= \bar{q} \left(\int_i^j \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} dl + \int_j^k \begin{Bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} dl + \int_k^i \begin{Bmatrix} L_1 \\ 0 \\ L_3 \end{Bmatrix} dl \right) \\ &= \frac{\overline{q}}{2} \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} l_{ij} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} l_{jk} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} l_{ki} \right) \end{aligned}$$

となる．ただし l_{ij}, l_{jk}, l_{ki} は三角形周囲のそれぞれの辺の長さである．

$$\int_S Q[N]^T ds = \int_S Q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} ds = \int_S Q \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} ds$$

は，式 (1.25) の面積分の公式から

$$\int_S Q[N]^T ds = \frac{QS}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

となる．したがって，式 (1.19) の $\{F\}$ は

$$\{F\} = \frac{\overline{q}}{2}\left(\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right\} l_{ij} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right\} l_{jk} + \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\} l_{ki}\right) - \frac{QS}{3}\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right\} \tag{1.27}$$

となる．式 (1.18) の計算について，$[B]$ は式 (1.7) より

$$\begin{aligned}
[B] &= \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2S}\left[\begin{array}{ccc} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_j - x_i & x_j - x_i \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2S}\left[\begin{array}{ccc} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B]^T[D][B] &= \frac{1}{4S^2}\left[\begin{array}{cc} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{4S^2}\left[\begin{array}{cc} k_x b_i & k_y c_i \\ k_x b_j & k_y c_j \\ k_x b_k & k_y c_k \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{4S^2}\left(\begin{array}{ccc} k_x b_i^2 + k_y c_i^2 & k_x b_i b_j + k_y c_i c_j & k_x b_i b_k + k_y c_i c_k \\ k_x b_i b_j + k_y c_i c_j & k_x b_j^2 + k_y c_j^2 & k_x b_j b_k + k_y c_j c_k \\ k_x b_i b_k + k_y c_i c_k & k_x b_j b_k + k_y c_j c_k & k_x b_k^2 + k_y c_k^2 \end{array}\right) \\
&= \frac{K_x}{4S^2}\left(\begin{array}{ccc} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{array}\right) + \frac{K_y}{4S^2}\left(\begin{array}{ccc} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
[K] &= \int_S [B]^T[D][B]ds = S[B]^T[D][B] \\
&= \frac{K_x}{4S}\left(\begin{array}{ccc} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{array}\right) + \frac{K_y}{4S}\left(\begin{array}{ccc} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{array}\right) \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

となり，以上から式 (1.16) は式 (1.26)，式 (1.27)，式 (1.28) を用いてとくことができる．