有限要素解析プログラム CRISP 計 算 例

編著 赤石 勝(東海大学名誉教授,新日本開発工業(株) 顧問)

共著 向後隆道((株)ミカミ・アイエヌジー 顧問)
白子博明((株)CPC 取締役)
前田浩之助(新日本開発工業(株) 社長)
仲俣浩(新日本開発工業(株) 専務)
杉山太宏(東海大学 教授)
飯沼孝一((株)オオバ 専門課長)
岩田尚親(開発虎ノ門コンサルタント(株) 課長代理)
今井誉人(小野田ケミコ(株) 主査)
吉富隆弘(東海大学大学院)
池谷真希(東海大学大学院)
Hong Pisith(東海大学大学院)

本書に掲載された製品名、会社名などは一般に各社の商標または、登録商標です。

まえがき

有限要素圧密解析の初心者が,複雑・不均質な自然地盤への対応に苦慮し,弾塑性構成式 の有用性を十分に理解出来ず実務に利用する場合,精緻な構成式もその実力を十分に発揮 できない。また,販売・利用されている有限要素圧密解析プログラムの計算結果は必ずしも 実際の軟弱地盤の挙動と一致しない。(社)地盤工学会の FEM の設計への適用に関する研究 委員会報告では,軟弱地盤地盤上の道路盛土に関する研究者の沈下量予測おいて,実際とは, かなり異なる現状である¹⁾。計算結果の違いは構成式によるのか,FE プログラムによるの か明らかでない。実務に利用する場合,一定・共通条件下で計算したら,どのプログラムで も同じ計算結果を得られる必要がある。購入したプログラムのソースコードが公開・解説さ れていない限り,計算結果に疑問を感じても入力データミスを再検討するしか術がない。

著者の一人は、ケンブリッジ大学の Britto らの開発した有限要素圧密解析プログラム "CRISP"を卒研生や院生に利用させてきた。しかし、学生たちの評価は"入出力が不便で 使いにくい"であった²⁾。しかし、Britto らの本には全ソースコードの解説されており、FEM とカムクレイという古典的弾塑性粘土モデルの批判的学習は、学生に役立つと考えていた。 また、実務家にとって施主が精緻な構成式による FE 解析を期待していない場合、CRISP の ようなプログラムにも、まだ活躍の場はあると考え、弾塑性 FE 解析初心者に対する学習資 料として計算例を取りまとめた。問題によっては FEM でなく、差分法などの簡単な数値計 算でも十分と考えられる場合があるので、Excel VBA による計算結果との比較も示した。し かし、CRISP には、利用上、著者らが理解・納得できない点もある。本書の不明点や誤りを ご指摘・連絡いただければ、著者らで今後も継続検討し、利用例のデータファイルを充実さ せていく予定である。古い CRISP は利用しにくいという意見を考慮し、入力データとその 作成法を計算例のデータファイルとともに著者の一人(向後隆道)の HP からダウンロード 可能とした。弾塑性構成式と有限要素解析プログラムの利用上の注意点や問題点の理解に 本書が少しでも役立てば幸いである。

まえがき iii

1.	1. 弾塑性応力ひずみ関係					
	1.1	降伏関数 F と塑性ポテンシャル Q 1				
	1.2	弾塑性応力ひずみマトリックス 2				
	1.3	三軸供試体の弾塑性応力ひずみ関係 3				
	1.4	弾塑性モデルと静止土圧係数 $K_{_0}$ 値 3				
	1.5	粘塑性流動則と <i>K</i> ₀ 圧縮 5				
2. 一次元排水圧縮試験 ·······7						
	2.1	土質定数の設定 7				
	2.2	弾性土の計算例 Cri 2A.dat 7				
	2.3	弾塑性土(カムクレイ)の計算例 8				
	2.4	CamBiot3D.f の計算例 ⁸⁾ 9				
	2.5	Excel VBA"CDHK0.xlsm"の計算例 10				
3. 三軸圧縮試験						
	3.1	三軸圧縮試験の要素図 12				
	3.2 K ₀ 圧縮応力増分によるひずみ増分 Cri3A.dat 12					
	3.3	応力制御で軸応力のみ増加の三軸圧縮 CD 試験	険 13			
	3.4	三軸圧縮 CU 試験と非排水経路 13				
4.	圧密詞	【験			15	
	4.1	圧密度と時間係数 Cri4A.dat 15				
	4.2	一次元圧密と等方圧密 Cri4B.dat 16				
	4.3	CRISPの土質定数 Cri4C.dat 17				
	4.4	弾塑性及び弾粘塑性有限要素一次元圧密解析	Cri4D.dat	Cri TDL.dat	18	
	4.5	バーチカルドレーンの圧密 Cri VD2x19.	dat	21		
	4.6	三軸供試体の異方圧密 Cri TriRDDC.dat	24			
5.	平面び	▶ずみ圧縮・圧密問題				
	5.1	排水圧縮と掘削 Cri PSD 全.dat, Cri PS	SD 局 .dat	27		
	5.2	平面ひずみ圧密解析 PSC 全.dat, Cri PSC	C局.dat	29		
	5.3	超軟弱地盤における道路盛土試験工事の事例解	裈 析	29		
6	クイックサンドの計算 (ri 浸漆 dat					
0.	6 1	一次元浸添水压に上る方劾広力亦化 22			00	
	6.2	一次元(平面ひずみ)浸透水圧による有効応力変化 55	h亦伊	34		
_	0.2		了交几	94		
7.	孔内載荷試験の圧密効果 Cri KC.dat					
	7.1	調査・試験結果と土質定数 37				
	7.2	北内載荷試験と計算結果の比較 CriKE1.da	at 37			
	参考文献 40					
	附録~ CRISP の入力データ作成支援~ 41					

あとがき 45

1. 弾塑性応力ひずみ関係

弾塑性応力ひずみ関係は、弾塑性剛性マトリックス $\underline{D_{ep}}$ と全ひずみ増分<u>d</u> ϵ (弾性ひずみ<u>d</u> ϵ_e)と塑性ひずみ $d\epsilon_p$ の和)により、式(1.1)で表される。

 $\underline{D_{ep}}$ の誘導には、①塑性ひずみに関係する降伏関数 F、②塑性ひずみによる材料変化を示す硬化則、③塑性ひずみ成分を決定する流動則、塑性ポテンシャル Q などが使われる。 D_e の計算には、弾性係数 E とポアソン比 v が必要である。

三軸供試体の弾塑性応力ひずみ関係の計算のみに限定するならば,簡単な数値積分でよ く FEM を必要としないが,本章では FE 計算の理解に必要な粘土の弾塑性応力ひずみ関係 について記述する。

1.1 降伏関数 Fと塑性ポテンシャル Q

ケンブリッジ大学で開発された弾塑性粘土モデルのカムクレイは、関連流動則 F=Q を採用している。オリジナルカムクレイ、修正カムクレイそして著者らが提案している降伏関数 をそれぞれ式(1.2)~(1.3)で表す^{3),4)}。

ここに、 $q(=\sigma_a - \sigma_r)$ は偏差応力、 $p(=\frac{\sigma_a + 2*\sigma_r}{3})$ は平均有効応力、 $\eta(=q/p)$ は応力比、 p_i は 載荷前圧密時の平均有効応力、Mは限界状態線 CSL の勾配、 η_i は圧密時の応力比、 γ は定数 である。式(1.4)の $\gamma=0$ 、N=M とすれば、 $F_p = F_M$ である。 $N \leq M$ とすれば軟化挙動を表現し うる。図 1.1 と図 1.2 にこれらの降伏面の一例を示した。



図 1.1 降伏面F_oの形状

図 1.2 降伏面F_MとF_pの形状

式(1.2)の等方ならびに K_o E密粘土の降伏面を実線と破線で示している。一次元圧密粘土の圧密降伏応力は、過去の圧密圧力の最大値、最大有効主応力 σ_1 である。 σ_1 一定線を図 1.1 に一点鎖線で示した。もう一つの一点鎖線は、過去の最大 σ_3 一定線である。一次元圧密粘土では、作用応力が σ_1 を越えたら塑性ひずみが発生する。異方圧密粘土の σ_3 が過去の最大値を越えても塑性ひずみが発生する可能性がある。オリジナルカムクレイモデルの降伏関数は、誘導時、積分定数決定時の圧密圧力でその形状、弾性挙動を示す応力空間が大きく変化し、圧密圧力の位置が特異点となって F_o の偏微分ができない。しかし、図 1.2 の降伏関数 $F_M \ge F_p$ には特異点がない⁵。

1. 2 弾塑性応力ひずみマトリックス

平面ひずみ条件下の弾性ひずみ増分とその係数マトリックスDeは、式(1.5)で表される。

$$d\underline{\varepsilon}_{\underline{e}} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D_e^{-1}}^* d\underline{\sigma} \qquad , \qquad \underline{D_e} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{x} (1.5)$$

ここに, Eは弾性係数, vはポアソン比である。

粘土が弾性挙動を示す応力空間が $F = (\sigma, v_p) = 0$ である。一次元圧密試験の圧密降伏応力の増加と同様,異方圧密粘土も塑性体積ひずみに対応して降伏面が拡大する。また,塑性ひずみ増分は,式(1-6)の流動則により塑性ポテンシャル Qの応力勾配に比例すると仮定される。全ひずみ増分と応力増分の関係は,式(1.7)で表わされる。

式(1-7)の両辺に $\left(\partial F/\partial \underline{\sigma}\right)^T D_e$ を掛ける。

降伏関数Fを有効応力と塑性体積ひずみの関数と仮定し、dF = 0から

$$dF = 0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^{T} d\underline{\sigma} + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{v}_{p}}\right)^{T} d = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^{T} d\underline{\sigma} + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{v}_{p}}\right)^{T} \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{\sigma}}\right)$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^{T} d\underline{\sigma} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{v}_{p}}\right)^{T} \lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{\sigma}}\right)$$
$$\vec{\mathfrak{X}}(1.9)$$

式(1.9)を式(1.8)右辺の第一項に代入し式(1.10)を得る。

式(1.10)の λ を式(1.6)に代入すれば、弾塑性応力ひずみマトリックスDepが誘導される。

$$d\underline{\sigma}/d\underline{\varepsilon} = \underline{D}_{ep} = \underline{D}_{e} - \frac{\underline{D}_{e} \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{\sigma}}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^{T} \underline{D}_{e}}{-\left(\frac{\partial F}{\partial v_{p}}\right)^{T} \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{\sigma}}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}\right)^{T} \underline{D}_{e} \left(\frac{\partial Q}{\partial \underline{\sigma}}\right)}$$
$$\vec{\mathbf{x}}(1.11)$$

1.3 三軸供試体の弾塑性応力ひずみ関係

軸方向ひずみ ε_a , 半径方向ひずみ ε_r とし, 体積ひずみ $v = \varepsilon_a + 2 * \varepsilon_r$ と偏差ひずみ $\varepsilon = 2(\varepsilon_a - \varepsilon_r)/3\varepsilon_p \ge q$ で表現する。体積弾性係数 *K* とせん断弾性係数 *G* を用いて, 弾性ひずみ成分は式(1.12)で表される。

$$\begin{bmatrix} \delta \upsilon_e \\ \delta \varepsilon_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \qquad \qquad d\upsilon_e = \frac{1}{K} dp \quad \text{ZEV:} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$
$$d\varepsilon_e = \frac{1}{3G} dq \quad \text{ZEV:} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad \qquad \text{E}(1.12)$$

塑性ひずみ成分は、式(1.13)で表される。

λを関連流動則に代入し、ひずみ増分は式(1.14)で表される。

$$\begin{bmatrix} d\upsilon \\ d\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\upsilon_e + d\upsilon_p \\ d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{1}{K} , \quad C_{12} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$C_{21} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} , \quad C_{22} = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{1}{3G}$$

式(1.14)

1. 4 弾塑性モデルと静止土圧係数 Ko 値

応力ひずみ関係には一次元圧縮, K_0 応力状態を表現できることが必要である。軸方向ひずみ増分 $d\varepsilon_a$,半径方向ひずみ増分 $d\varepsilon_r = 0$ とすれば, $d\varepsilon(=2*d\varepsilon_a/3)/d\upsilon(=d\varepsilon_a)=2/3$ が K_0 条件である。

$$d\varepsilon/d\upsilon = 2/3 \qquad \qquad \vec{\mathbf{x}}(1.15)$$

$$\frac{d\upsilon_p}{d\upsilon} = 1 - \kappa/\lambda = \Lambda \qquad d\upsilon_p = \frac{\lambda - \kappa}{f_0} \frac{dp}{p} \qquad d\upsilon = \frac{\lambda}{f_0} \frac{dp}{p} \qquad \vec{\mathfrak{R}} (1.16)$$

式(1.19)

オリジナルカムクレイの K_0 値: 塑性ひずみ増分の比が,次の K_0 条件を満たす必要がある。 K_0 値は,式(1.17)の η_0 から求められる。

$$d\varepsilon_p / dv_p = 1/(M - \eta_0) = 2/3 \implies \eta_0 = M - 1.5$$
 $\vec{\mathfrak{R}}(1.17)$

Atkinson の K₀ 値決定法を式(1.17)との比較のため要点のみ記述する⁶。

偏差ひずみ増分:
$$\delta \varepsilon = H\delta p + (FH + \frac{1}{3G})\delta q$$

体積ひずみ増分: $\delta \upsilon = (\frac{H}{F} + \frac{1}{K})\delta p + H\delta q$
 $H = \frac{\lambda - \kappa}{(1+e)Mp} \quad K = \frac{(1+e)p}{\kappa} \quad G = K\frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad M = \frac{6\sin\phi}{3-\sin\phi}$
 $\frac{1}{F}(=\frac{\delta \upsilon^p}{\delta \varepsilon^p}) = M - \eta$

これらの関係を一次元圧縮条件に代入し、Fの二次式(1.18)を得る。 η_0 とから K_0 値を決定しうる。

$$M - \frac{1}{F} = \frac{(3 - 2/(KH)) - 2/F}{(2 - 1/(HG)) - 3F}$$

$$\pi(1.18)$$

$$\eta_0 \left(=\frac{q_0}{p_0}\right) = M - \frac{1}{F} = \frac{3(1 - K_0)}{1 + 2K_0}$$

Atkinson による K₀値算定例(参考文献 6 の 107 頁の E3.2): λ=0.08, κ=0.05, *M*=0.94, ν=0.25 を用いて 1/*F*=0.66 と 1/*F*=-1.62 で K₀=0.76 であるが, ポアソン比 v から求める弾性ひずみ による K₀値(=ν/(1-ν))=1/3 である。式(1.19), 塑性ひずみ増分による K₀値は, η₀ =*M* - 1.5=-0.56, K₀=1.89 である。参考文献 6)には弾性ひずみと塑性ひずみによる K₀値の違いに関する 説明はない。

修正カムクレイの K_0 値;修正カムクレイの塑性ポテンシャル Q_M と式(1.4)のN=Mとした Q_P は,

$$Q_M = q^2 - M^2 (p^2 - pp_i) \qquad \qquad \vec{x}(1.20)$$

$$Q_p = q^2 - 2\gamma pq + \gamma^2 pp_i + M^2 (p^2 - pp_i)$$
 $\vec{x}(1.21)$

 $Q_{\rm p}$ の定数 γ =0 とすれば $Q_{\rm M}$ = $Q_{\rm p}$ なので,式(1.21)を用いた塑性ひずみ比=2/3 の K_0 条件は,式(1.22)となり定数 γ に依存する。定数 γ =0 とすれば,修正カムクレイの K_0 値が式(1.23)から求められる。Atkinson による K_0 値算定例の定数を用いた修正カムクレイの K_0 値は, η_0 =0.27, K_0 =0.77 となる。

$$\frac{d\varepsilon_p}{dv_p} = \frac{2(\eta_0 - \gamma)}{M^2 - \eta^2} = \frac{2}{3} \implies \gamma = (\eta_0^2 + 3\eta_0 - M^2)/3$$

$$\vec{x}(1.22)$$

 $\eta_0^2 + 3\eta_0 - M^2 = 0 \qquad \qquad \vec{x}(1.23)$

1.5 粘塑性流動則と Ko 圧縮

粘塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{vp}$ の粘塑性流動則は,式(1.24)で与えられる。粘塑性ひずみであるが, 定常状態の解は塑性ひずみである⁷⁾。

ここに、<>はF>0の場合、関数 $F(\sigma)$ であり、 $F \leq 0$ の場合、 $F(\sigma)=0$ を意味する。

正規E密粘土は、載荷増分により F>0 となるが、粘塑性ひずみの増加とともに F は減少 する。F の正負は、粘塑性ひずみが発生するか否かに関係する。F の偏微分が不要なため、 非関連流動則ならばオリジナルカムクレイモデルの特異点問題もない。ひずみ成分を決定 する塑性ポテンシャル Q の応力勾配が、土の変形拘束条件と関係する。Q がひずみ成分に 影響することを強調するため、K₀ 圧縮(CD)計算で計算結果の K₀値が仮定する Q に依存 することを示す。

Atkinson による K_0 値算定例と同じ土質定数を採用するが、計算に不足する実測 K_0 値= 0.5,初期間隙比 e_0 =1.5,載荷前鉛直有効応力 σ_{y0} =100(kPa)とする。 K_0 値の再現計算なので、 弾性ひずみの計算に用いるポアソン比 v (= $K_0/(1+K_0)$)は K_0 値から算定した。ただし、Atkinson の例題では v =0.25 が使われており、弾性ひずみと塑性ひずみの K_0 値が異なることに留意 する必要がある。また塑性ポテンシャル Q の定数 y 値は、式(1.22)から求め y=0.643 を採用 する。鉛直ひずみ 0.001 を 20 回加えた場合の鉛直ならびに水平応力の計算結果が図 1.3 で ある。最終荷重段階の応力状態から計算したオリジナルならびに修正カムクレイモデルの K_0 値は、それぞれ 0.67 と 0.64 となり、初期設定 K_0 値(=0.5)より過大な値が計算される。カ ムクレイの塑性ポテンシャルでは K_0 値を再現できない。仮定する塑性ポテンシャルの不具 合である。式(1.21)の塑性ポテンシャルの定数 y=0.643 とすれば、初期設定 K_0 値=0.5 とな ることを図 1.3 から確認しうる。計算に用いた数値積分プログラム CDHK0 関連 1.xlsm (圧 密 C、排水 D、ひずみ制御 H で関連流動則の意)の記号説明や計算法の説明は、プログラム 中に記述している。



図 1.3 K₀ 圧縮の有効応力経路

it's CAD では **骨組解析、弾性解析の FEM コマンド** がフリーコマンドとして標準で装備されています。



ライセンスの販売はインデックス出版が行います。 https://www.index-press.co.jp/

建設 CALS/EC 対応 J Wキャドデータにも対応!

図面の電子納品における標準ファイルとして扱われる SXF に対応、また、普及率の高い IW キャドのデータの読み込ができます。

フリーの専用コマンド 多数! 一般的な作図機能に加え、専用コマン ドによる拡張を無償にてご提供してお ります。 測量コマンド(トラバース、クロソイド、 面積計測など)

配筋コマンド(鉄筋配置、鉄筋加工図、 鉄筋数量表など)

機械コマンド(寸法公差記入、面取寸 法など)

建築コマンド(包絡処理、日影図、線 記号変形など)

it's CAD MAX3 価格表

商品	価格(円)
1ライセンス	8,000+税
1 ライセンス (DVD-R 付)	10,000 + 税
5ライセンス	30,000 + 税
20ライセンス	112,000 + 税
50ライセンス	260,000 + 税
100ライセンス	480,000 + 税
200ライセンス	880,000 + 税
アカデミックライセンス	0
【官公庁向け】20ライセンス	80,000 + 税
【官公庁向け】無制限ライセンス	200,000 + 税

【電子書籍版】エクセル有限要素法入門 構造解析編

【価格】¥3,200(本体価格)+税

【付録】プログラムダウンロード可(2次元弾性解析)

はじめに より抜粋

有限要素法は、もともと構造学の分 野から発達し、構造力学や構造工学の 多くの問題に適用され威力を発揮して きました。一方、有限要素法は偏微分 方程式の近似解法としても用いること **目次** 1.連立一次方程式の解法 2.マトリックス法 3.有限要素法による弾性力学の静的問題の解法 4.補足(有限要素法と差分法)

ができ、しかも近似解法として数々の利点も持っています。多くの自然現象が偏微分方程 式を用いて記述できることからも分かるように、有限要素法は物理や工学の分野では欠か すことのできない道具となっています。本書は、有限要素法の基本が理解し、また工学的 諸問題を有限要素法を用いて解くことができるようになることを目指しています。

【電子書籍版】エクセル有限要素法入門 骨組構造解析編

【価格】¥4,800(本体価格)+税

【付録】プログラムダウンロード可(2 次元トラス、2 次元ラーメン、3 次元ラーメン解析)

はじめに より抜粋

骨組構造の解析では構造内に選定された「節点」と呼 ばれる点における力と変位によって、その構造の応力や 変形の状態を記述することが、有効かつ便利なことが多 い.節点は普通部材端または接合点に設定される.この なかで、柱や梁とかいった構造体の構成部分としての構 造要素の概念が導入される.このような個々の要素の特 性を用いて構造物の数学的モデルを構成し、それらの式 **目 次** 1.マトリックス法 2.2 次元トラス構造解析 3.2 次元ラーメン構造解析 4.2 次元骨組構造解析 5.3 次元骨組構造解析

を総合して解くことにより構造物全体の特性を表現できる. 個々の構成要素から構造物を 組み立てる過程においては幾何学な適合条件を満足しなければならないし, さらに力学的 な釣り合い条件をも満足しなければならない.

本書の第一の目的は有限要素法をわかりやすく解説しプログラムを実際に作って,解説 と合わせて見ること,及び実際に使ってみることにより,有限要素法を理解することであ る.第二の目的は,実用的な2次元及び3次元の骨組解析プログラムを提供することにある. それは,第一の目的と同様,そのソースリストを見ることにより一層,有限要素法の考え 方や利用法を学ぶことの他,さらに実用的な例題を解くことにより力学的な挙動が,実感 として理解できるようになる.これはさらに物理的,数学的な理解を深めることにもつな がる.本プログラムは有限要素法の学習のみならず,実務にも十分使えるものである.ソー スコードをすべて公開しており,またホームページから随時ダウンロードすることができ るので,修正や追加して,機能の強化や仕事に合わせてカスタマイズしていくことが可能 である.