コンパクトシリーズ　数学

フーリエ解析・ラプラス変換

河村哲也　著

インデックス出版

Preface

大学で理工系を選ぶみなさんは、おそらく高校の時は数学が得意だったのではないでしょうか。本シリーズは高校の時には数学が得意だったけれども大学で不得意になってしまった方々を主な読者と想定し、数学を再度得意になっていただくことを意図しています。それとともに、大学に入って分厚い教科書が並んでいるのを見て尻込みしてしまった方を対象に、今後道に迷わないように早い段階で道案内をしておきたいという意図もあります。

数学は積み重ねの学問ですので、ある部分でつまずいてしまうと先に進めなくなるという性格をもっています。そのため分厚い本を読んでいて、枝葉末節にこだわると読み終えないうちに嫌になるということが多々あります。このような時には思い切って先に進めばよいのですが、分厚い本だとまた引っかかる部分が出てきて、自分は数学に向かないとあきらめてしまうことになりかねません。

このようなことを避けるためには、第一段階の本、あるいは読み返す本は「できるだけ薄い」のがよいと著者は考えています。そこで本シリーズは大学の２～３年次までに学ぶ数学のテーマを扱いながらも重要な部分を抜き出し、一冊については本文は 70 ～ 90 頁程度（Appendix や問題解答を含めてもせいぜい 100 ～ 120 頁程度）になるように配慮しています。具体的には本シリーズは

微分・積分
線形代数
常微分方程式
ベクトル解析
複素関数
フーリエ解析・ラプラス変換
数値計算

の 7 冊からなり、ふつうの教科書や参考書ではそれぞれ 200 ～ 300 ページになる内容のものですが、それをわかりやすさを保ちながら凝縮しています。

なお、本シリーズは性格上、あくまで導入を目的としたものであるため、今後、数学を道具として使う可能性がある場合には、本書を読まれたあともう一度、きちんと書かれた数学書を読んでいただきたいと思います。

河村哲也

Contents

Chapter 1

三角関数

1.1　三角関数とその性質

はじめに，三角関数とその性質についてまとめておきます．

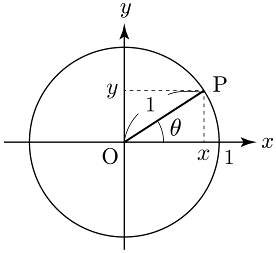

図 **1.1.1**

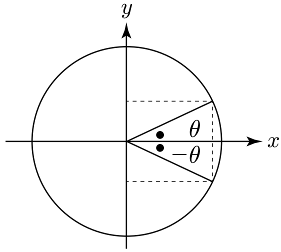

図 **1.1.2**

図 1.1.1 に示すように xy 平面に原点中心の単位円を考え，円周上の任意の 1 点を P とすると点 P の座標は直線 OP と x 軸のなす角度 θ によって指定できます．すなわち，x 座標と y 座標はそれぞれ θ の関数になっています．これらをそれぞれ**余弦関数**（コサイン）および**正弦関数**（サイン）とよび

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \tag{1.1.1}$$

と記します．**ピタゴラスの定理**から

$$y^2 + x^2 = \overline{OP}^2 (= 1)$$

が成り立つため，式(1.1.1) を代入すれば

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \tag{1.1.2}$$

となります．図 1.1.2 から

$$x = \cos(-\theta) = \cos\theta, \quad y = \sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{1.1.3}$$

であることがわかります．また，代表的な角度に対して sin および cos は

$$\begin{aligned} &\cos 0 = 1, \quad \cos(\pi/2) = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos(3\pi/2) = 0 \\ &\sin 0 = 0, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin(3\pi/2) = -1 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

および

$$\begin{aligned} &\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, \quad \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}, \quad \cos(\pi/3) = 1/2 \\ &\sin(\pi/6) = 1/2, \quad \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}, \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

という値をもちます（図 1.1.3）.

平面上の点 P から出発して，原点中心の円のまわりを 1 周すればもとの点に戻るため

$$x = \cos\theta = \cos(\theta + 2\pi), \quad y = \sin\theta = \sin(\theta + 2\pi)$$

$$x = \cos\theta = \cos(\theta - 2\pi), \quad y = \sin\theta = \sin(\theta - 2\pi)$$

が成り立ちます．1 行目の式は反時計回り，2 行目の式は時計回りに 1 周した場合に対応します．同様に n を整数としたとき，原点中心の円を n 周しても同じ点に戻るため

$$x = \cos\theta = \cos(\theta + 2n\pi), \quad y = \sin\theta = \sin(\theta + 2n\pi) \tag{1.1.6}$$

が成り立ちます．すなわち三角関数は周期が 2π の**周期関数**になっています．

なお，この式は上の 2 つの式を特殊な場合（$n = \pm 1$）として含んでいます．

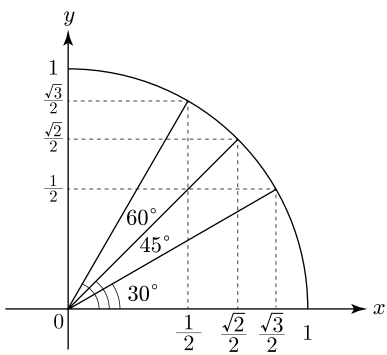

図 **1.1.3**

正弦関数と余弦関数に対して次の加法定理が成り立ちます．

Point

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{1.1.7}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1.1.8}$$

証明は以下のようにします．図 1.1.4 から，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=CE=CD+DE=CD+AB=CB\cos\alpha+OB\sin\alpha\\&=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\\cos(\alpha+\beta)&=OE=OA-AE=OA-BD=OB\cos\alpha-CB\sin\alpha\\&=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

が成り立ちます．一方，式(1.1.8）と式(1.1.3）から

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\big(\alpha+(-\beta)\big)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

すなわち

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{1.1.9}$$

となり，同様にして

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{1.1.10}$$

が成り立つことがわかります．

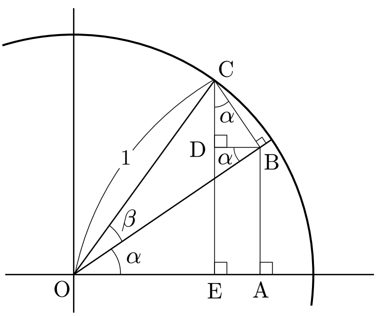

図 **1.1.4**

加法定理は上のように図を使って証明できますが，**オイラーの公式**

Point

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.1.11}$$

を使うと計算によって示すこともできます．すなわち，

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

とオイラーの公式から

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\\
&= e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\\
&= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}$$

となりますが，この式の実部と虚部を等しいとおけば加法定理が導けます．

加法定理と式(1.1.4）を用いればよく知られた関係

$$\sin(\pi/2-\theta) = \cos\theta, \quad \cos(\pi/2-\theta) = \sin\theta \tag{1.1.12}$$

を，式を使って証明できます．たとえば前者は

$$\begin{aligned}
\sin(\pi/2-\theta) &= \sin(\pi/2)\cos\theta - \cos(\pi/2)\sin\theta\\
&= 1\times\cos\theta - 0\times\sin\theta\\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

となります．後者も同様です．また，公式

$$\begin{aligned}
&\sin(\pi-\theta) = \sin\theta, \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta\\
&\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta, \quad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta
\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

も簡単に得られます．たとえば

$$\cos(\pi-\theta) = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta = (-1)\times\cos\theta + 0\times\sin\theta = -\cos\theta$$

のように計算します．残りの式も同様です．

三角関数の積を和で表現する次の公式も有用です．

Point

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\} \tag{1.1.14}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\} \tag{1.1.15}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\} \tag{1.1.16}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\} \tag{1.1.17}$$

これらはどれも右辺に加法定理を使えば証明できるため式(1.1.14）のみ示します．式(1.1.14）の右辺の括弧内を加法定理で展開すれば

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\&\qquad=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=2\sin\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

となるため，両辺を 2 で割れば式(1.1.14）になります．

三角関数には **2 倍角の公式**，**3 倍角の公式**とよばれる以下の関係があります．

Point

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{1.1.18}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta \tag{1.1.19}$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta,\quad \cos 3\theta = 4\cos^3\theta-3\cos\theta \tag{1.1.20}$$

これらも加法定理から証明できますが，オイラーの公式と指数関数の公式を用いても簡単に証明できます．たとえば，式(1.1.20）については以下のようになります．すなわち，

$$\begin{aligned}&\cos 3\theta+i\sin 3\theta=e^{3i\theta}=(e^{i\theta})^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta+3\cos\theta\times(i)^2\sin^2\theta+(i)^3\sin^3\theta\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\\&=\cos^3\theta-3\cos\theta(1-\cos^2\theta)+i\left\{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta-\sin^3\theta\right\}\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\end{aligned}$$

であるので，両辺の実部と虚部を等しく置けば式(1.1.20）が得られます．

式(1.1.19) を $\cos^2\theta$ と $\sin^2\theta$ について解けば

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

となり，さらに θ のかわりに $\theta/2$ を代入すれば

Point

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \tag{1.1.21}$$

となります．公式(1.1.21) を**半角の公式**とよんでいます．

1.2　三角関数の微分積分

三角関数の微分と積分についてはよく知られているように

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x \tag{1.2.1}$$

となります（積分定数省略）．これらの公式も前述のオイラーの公式を用いて指数関数の微分積分に直すことによって導くことができます．すなわち

$$\frac{de^{ix}}{dx} = ie^{ix}, \quad \int e^{ix}dx = \frac{1}{i}e^{ix} = -ie^{ix}$$

が成り立つため，式(1.1.11) から

$$\frac{d\cos x}{dx} + i\frac{d\sin x}{dx} = ie^{ix} = i(\cos x + i\sin x) = -\sin x + i\cos x$$

$$\int \cos x dx + i\int \sin x dx = -ie^{ix} = -i(\cos x + i\sin x) = \sin x - i\cos x$$

となります．そこで，上式の実部と虚部を等置すれば式(1.2.1) が得られます．

上に述べたように，$\sin x, \cos x$ は周期 2π の関数です．同様に，a を実数としたとき，$\sin ax, \cos ax$ は周期 $2\pi/a$ の周期関数になります．なぜなら，

$$\sin ax = \sin(ax + 2n\pi) = \sin a(x + 2n\pi/a)$$

$$\cos ax = \cos(ax + 2n\pi) = \cos a(x + 2n\pi/a)$$

となるからです．たとえば， $\sin 2x, \cos 2x$ は周期が π であり，$\sin \pi x, \cos \pi x$ は周期が $2\pi/\pi = 2$ になります．

三角関数には，m と n を正の整数としたとき，以下の重要な性質があります（**直交関係**）．

Point

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \tag{1.2.2}$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad (m \neq n), \quad \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{m\pi x}{l}dx = l \tag{1.2.3}$$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \quad (m \neq n), \quad \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{m\pi x}{l}dx = l \tag{1.2.4}$$

これらの各式は簡単に確かめられます．たとえば，式(1.2.2）については

$$\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l} \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\sin\frac{(m+n)\pi x}{l} + \sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\right\}dx \\
&\quad = \left[-\frac{l}{2(m+n)\pi}\cos\frac{(m+n)\pi x}{l} - \frac{l}{2(m-n)\pi}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right]_{-l}^{l} \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

となります．ここで，第 2 式から第 3 式の変形では $m-n=0$ を除く必要があります．しかし，$m-n=0$ のときはもともと sin の項は 0 になり第 2 式の積分には現れないので上式のように変形しています．

次に式(1.2.3）についても，$m \neq n$ ならば

$$\begin{aligned}
&\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m+n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right\}dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[-\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l} + \frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\right]_{-l}^{l} \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

となります（$m=n$ のときは，分母が 0 になる項があるため，第 2 式から第 3 式は得られません）．$m=n$ のときは，式(1.2.3）は

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{2m\pi x}{l}+1\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{l}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{l}+x\right]_{-l}^{l}=l$$

となります．式(1.2.7）も同様の計算で確かめることができます．

特に式(1.2.5）〜（1.2.7）において，$l=-\pi$，$l=\pi$ とおけば

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0 \tag{1.2.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=0 \quad (m\neq n),\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx dx=\pi \tag{1.2.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=0 \quad (m\neq n),\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx dx=\pi \tag{1.2.7}$$

が成り立ちます．

■周期関数

関数 $f(x)$ すべての x に対して

$$f(x+T)=f(x) \tag{1.2.8}$$

という性質をもつ場合 $f(x)$ を周期 T の**周期関数**といいます．周期関数の代表は三角関数ですが，三角関数以外でも周期関数はいくらでも考えられます．たとえば，図 1.2.1（a）に示す関数は $y=3x^2/2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の部分をとりだして周期が 2 の関数をつくったものです．同様に図 1.2.1（b）は $y=x$ の $-\pi<x<\pi$ の部分からつくった周期 2π の周期関数です．図 1.2.1（a）の関数は連続ですが，図 1.2.1（b）の関数は $x=(2n-1)\pi$（n 整数）で**不連続**であり，そこでは値が定義されていません．後述のフーリエ級数ではこのような**不連続点**をもつ周期関数も取り扱いますが，不連続点における $f(x)$ の値は $f(x+0)$ と $f(x-0)$ の平均の値として定義すると便利です．このとき，図 1.2.1（b）の関数では $f((2n-1)\pi)=0$ と定義されます．

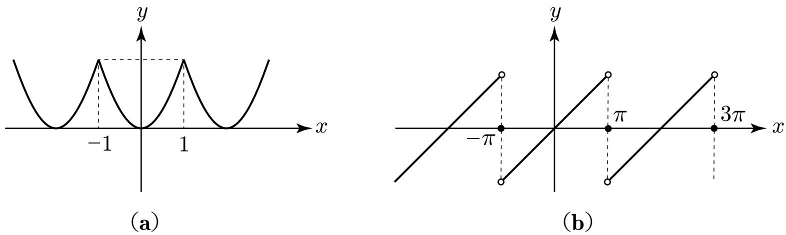

図 **1.2.1**

Problems　　　　Chapter 1

1. 次式を証明しなさい.

   (a) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$

   (b) $\dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

2. 次式の値を求めなさい.

   (a) $\sin 15^\circ$

   (b) $\tan 75^\circ$

   (c) $\cos 22.5^\circ$

3. 次の方程式の解を求めなさい．ただし $0 \leqq x < 2\pi$ とします.

   (a) $\sin 2x = \cos x$

   (b) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

4. $e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n$ を用いて次の公式を証明しなさい.

   (a) $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

   (b) $\cos 4\theta = 1 - 8\cos^2\theta + 8\cos^4\theta$