コンパクトシリーズ　数学

複素関数

河村哲也　著

インデックス出版

Preface

大学で理工系を選ぶみなさんは、おそらく高校の時は数学が得意だったのではないでしょうか。本シリーズは高校の時には数学が得意だったけれども大学で不得意になってしまった方々を主な読者と想定し、数学を再度得意になっていただくことを意図しています。それとともに、大学に入って分厚い教科書が並んでいるのを見て尻込みしてしまった方を対象に、今後道に迷わないように早い段階で道案内をしておきたいという意図もあります。

数学は積み重ねの学問ですので、ある部分でつまずいてしまうと先に進めなくなるという性格をもっています。そのため分厚い本を読んでいて、枝葉末節にこだわると読み終えないうちに嫌になるということが多々あります。このような時には思い切って先に進めばよいのですが、分厚い本だとまた引っかかる部分が出てきて、自分は数学に向かないとあきらめてしまうことになりかねません。

このようなことを避けるためには、第一段階の本、あるいは読み返す本は「できるだけ薄い」のがよいと著者は考えています。そこで本シリーズは大学の２～３年次までに学ぶ数学のテーマを扱いながらも重要な部分を抜き出し、一冊については本文は 70 ～ 90 頁程度（Appendix や問題解答を含めてもせいぜい 100 ～ 120 頁程度）になるように配慮しています。具体的には本シリーズは

微分・積分
線形代数
常微分方程式
ベクトル解析
複素関数
フーリエ解析・ラプラス変換
数値計算

の 7 冊からなり、ふつうの教科書や参考書ではそれぞれ 200 ～ 300 ページになる内容のものですが、それをわかりやすさを保ちながら凝縮しています。

なお、本シリーズは性格上、あくまで導入を目的としたものであるため、今後、数学を道具として使う可能性がある場合には、本書を読まれたあともう一度、きちんと書かれた数学書を読んでいただきたいと思います。

河村哲也

Contents

Chapter 1

複素数の関数

1.1　複素数

2 乗して－ 1 となるような仮想的な数を考え，i と表し**虚数単位**といいます．すなわち，

$$i^2 = -1 \tag{1.1.1}$$

を満たす数を考えます．仮想的な数といったのは，実数の場合には，どんな数でも 2 乗すれば正の数または 0 になり決して負にはならないからです．2 つの実数 a と b および虚数単位 i を用いて新しい数 α を

$$\alpha = a + ib \tag{1.1.2}$$

で定義します．ただし，$a = b = 0$ であれば $\alpha = 0$ とします．このように定義した α を**複素数**といいます．また a を α の**実数部**(**実部**), b を α の**虚数部**(**虚部**)といいます．さらに, 実数部が 0 の複素数 bi は $b \neq 0$ のとき**純虚数**とよびます．

α に対してその虚数部の符号を逆にした複素数を α の**共役複素数**といい，$\bar{\alpha}$ と表します．すなわち，式(1.1.2）に対して

$$\bar{\alpha} = a - ib \tag{1.1.3}$$

です．2 つの複素数の実数部と虚数部がそれぞれ別々に等しいとき 2 つの複素数は等しくなります．

2 つの複素数 $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ に対する四則演算を i を文字とみなして次のように定義します．

$$\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d) \tag{1.1.4}$$

$$\alpha - \beta = (a - c) + i(b - d) \tag{1.1.5}$$

$$\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\left(= \frac{\beta\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}\right) = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2} \tag{1.1.7}$$

ただし i^2 を－１で置き換えています．多くの複素数の四則演算も同様に i を文字とみなして計算し，i^2 ＝－１で置き換えます．i の高次のベキも i^2 ＝－１を使って，±１または± i にします．たとえば，

$$i^3 = i^2 \times i = -i, \qquad i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$$

のように計算しておきます．

Example 1.1.1

$\alpha = 2 + 3i$，$\beta = -3 - 4i$ のとき次の計算をしなさい．

(1) $\alpha + \beta$　(2) $\alpha - \beta$　(3) $\alpha\beta$　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}$　(5) $\alpha\bar{\alpha}$　(6) α^2

[Answer]

(1) $\alpha + \beta = (2 + 3i) + (-3 - 4i) = (2 - 3) + (3 - 4)i = -1 - i$

(2) $\alpha - \beta = (2 + 3i) - (-3 - 4i) = (2 + 3) + (3 + 4)i = 5 + 7i$

(3) $\alpha\beta = (2 + 3i)(-3 - 4i) = -6 + 12 + (-9 - 8)i = 6 - 17i$

(4) $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 + 3i}{-3 - 4i} = \frac{(2 + 3i)(-3 + 4i)}{(-3 - 4i)(-3 + 4i)} = \frac{(-6 - 12) + (8 - 9)i}{25}$$
$$= -\frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$$

(5) $\alpha\bar{\alpha} = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$

(6) $\alpha^2 = (2 + 3i)^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i$

■複素平面

複素数は２つの実数の組なので平面上の１点と１対１対応をつけることができます．すなわち，$\alpha = a + ib$ を，x 座標が a，y 座標が b であるような点 P に対応させます（図 1.1.1）．このように複素数と対応させた平面のことを**複素平面**または**ガウス平面**とよんでいます．平面上の点は $x - y$ 座標のみならず，極座標を用いても指定できます．すなわち，点 P は，原点と点 P を結ぶ線分の長さ r および x 軸とのなす角度 θ を用いて指定することができます．

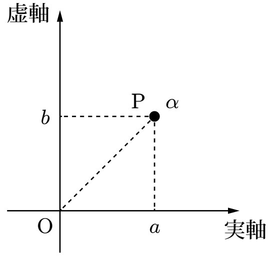

図 **1.1.1**

このとき，図 1.1.2 より

$$\alpha = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.1.8}$$

となります．これを複素数の極座標表示または**極形式**といいます．ここで r，θ と a，b の間には

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

という関係があります[*1]．

r のことを複素数の**絶対値**，θ のことを**偏角**といい，次の記号で表します．

$$r = |z|, \quad \theta = \arg(z)$$

ただし，偏角には 2π の不定性があります．すなわち，n を整数としたとき，偏角 θ の複素数と偏角 $\theta + 2n\pi$ をもつ複素数は絶対値が同じであれば複素平面上で同じ点を表します．このような不定性を除くため，偏角として $-\pi < \theta \leq \pi$（または $0 \leq \theta < 2\pi$）に限ったとき，α の**主値**とよび，大文字の記号を用いて $\mathrm{Arg}\,\alpha$ と記します．

式(1.1.8）において $r = 0$ の点を**零点**，$r \to \infty$ の点を**無限遠点**といいます．どちらも偏角は定義せず，1 点とみなします．

＊1　このままだと異なる複素数 $a + ib$ と $-a - ib$ は同じ θ をもつので，$\tan^{-1}(b/a)$ を計算するとき，$\cos\theta$ と a が同じ符号をもつように θ の値を決めます．

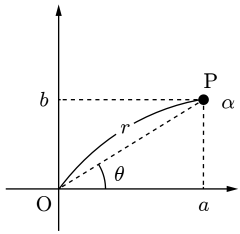

図 **1.1.2**

極形式を用いると 2 つの複素数の積の幾何学的な意味がはっきりします．いま α と β を極形式で表したとき

$$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$\beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

になったとします．積を計算すると

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2))\\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))\end{aligned}$$

となります．ただし三角関数の加法定理を用いています．したがって，積を表す複素数の絶対値は 2 つの複素数の絶対値の積であり，偏角は 2 つの複素数の偏角の和になります．

■積と回転

絶対値が 1 の複素数 γ を考え，その偏角を ζ とすれば，上記のことから，ある複素数に γ をかけることは，その複素数を原点のまわりに ζ だけ回転させることに対応します．たとえば，複素数（純虚数）i は絶対値が 1 で偏角は $\pi/2$ であるため，ある複素数に i をかけるとその複素数は $\pi/2$ 回転します．1 に i をかけて $\pi/2$ 回転させ，もう一度 i をかけてさらに $\pi/2$ 回転させると -1 になります（図 1.1.3）が，このことから複素平面を導入することにより，$i^2 = -1$ であることが自然に理解できます．

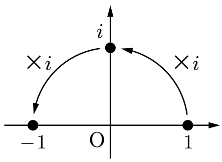

図 **1.1.3**

除算については，極形式に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))
\end{aligned}
$$

すなわち，2 つの複素数の商の絶対値はそれぞれの絶対値の商であり，偏角は 2 つの複素数の偏角の差になります．

Example 1.1.2

次の複素数を極形式で表しなさい．

(1) $1 - i$　　(2) $-\sqrt{3} + i$

[Answer]

(1) $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$　$\mathrm{Arg}\, z = \tan^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

したがって

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$$

(2) $|z| = \sqrt{3+1} = 2$　$\mathrm{Arg}\, z = \tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = \dfrac{5\pi}{6}$

したがって

$$-\sqrt{3} + i = \sqrt{2}(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6))$$

1.2　複素数の数列と級数

複素数の数列（**複素数列**）$\{z_n\}$ を考えます．この数列が n の増加にともないある一定の複素数 α に限りなく近づくならば，この数列は α に収束するといい，

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \tag{1.2.1}$$

と記します．また収束しない数列は**発散**するといいます．複素数が 2 つの実数の組みで表せることから，次の定理が成り立つことがわかります．

Point

複素数の数列 $z_n = x_n + iy_n$ が $\alpha = a + ib$ に収束するための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

が成り立つことである．

さらに実数の数列の極限の場合と同じく複素数の数列の極限に対して次の定理が成り立ちます．

Point

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = \beta$$

のとき

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = \alpha\beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (w_n \neq 0, \beta \neq 0)$$

複素数列 z_n を形式的に足し合わせた

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{1.2.2}$$

を**複素級数**といいます．複素級数の最初の n 項の和を S_n と書くことにして，**部分和**といいます．すなわち，

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

です．部分和もまた数列 S_n であると考えることができます．いま，部分和が n を限りなく大きくしたとき S に収束するとき，無限級数(1.2.2）は収束して極限値 S をもつといいます．収束しない級数を発散するといいます．

複素級数の収束に関する定理に関連して次の定理が成り立ちます．

Point

複素級数(1.2.2）が収束する必要十分条件は，実数部のつくる級数および虚数部のつくる級数が収束すること，すなわち，$z_n = x_n + iy_n$, $S = A + iB$ としたとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = A \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = B$$

が成り立つことである．

複素級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \tag{1.2.3}$$

は**べき級数**とよばれるもののひとつですが，このべき級数は $|z| < 1$ ならば $1/(1-z)$ に収束し，$|z| > 1$ ならば発散します．このことは部分和

$$S_n = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

を考えれば明らかです. すなわち, $|z| < 1$ ならば実数 $|z^{n+1}|$ は0に近づくため, 複素数 z^{n+1} は（絶対値が 0 に近づくため）0 に近づきます．また $|z| > 1$ ならば n の増加にともない $|z^{n+1}|$ は限りなく大きくなるため，z^{n+1} は発散します．

複素級数(1.2.2）に対して，実数の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \tag{1.2.4}$$

を**絶対値級数**といいます．絶対値級数が収束（**絶対収束**）すればもとの級数も収束します．

1.3　複素変数の関数

複素数 $z = x + iy$ において，x と y が互いに独立な変数のとき z は複素変数といいます．複素変数 z に対して，複素数 w が対応づけられているとき，w は z の関数（**複素関数**）であるといい，

$$w = f(z) \tag{1.3.1}$$

と記します．w の実数部を u，虚数部を v としたとき，これらは x と y の関数と考えられます．そこで式(1.3.1) は

$$f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y) \tag{1.3.2}$$

と書くことができます．そして関数 $f(z)$ は 2 つの実数 x，y を 2 つの実数 u，v に対応づけるものと考えられます．関数 $f(z)$ を実関数のグラフのように図示するためには，4 つの実数の組み $(x,\ y,\ u,\ v)$ を表示しなければならず，4 次元空間が必要になり一般に不可能です．そこで，そのかわりに $x - y$ 面（z 面）の曲線が $u - v$ 面（w 面）でどのように写像されるか，あるいは w 面の曲線が z 面にどのように写像されるかを調べます（図 1.3.1）．

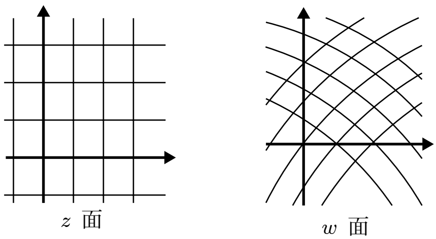

図 **1.3.1**

Example 1.3.1

$w = z^2$ による写像を調べなさい．

［**Answer**］

$z = x + iy$，$w = u + iv$ を代入し実数部どうしと虚数部どうしを等しいとおけば

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

となります．したがって，w 面で u ＝一定の直線は，z 面では双曲線 $u = x^2 - y^2$ に写像され，v ＝一定の直線は，z 面で双曲線 $2xy = v$ に写像されます（図 1.3.2）．

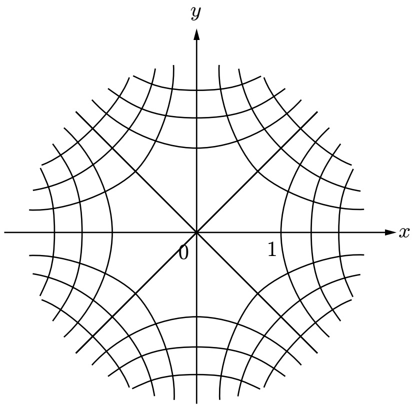

図 **1.3.2**

複素関数 $f(z)$ に対して，もし z が α に限りなく近づいたとき，$f(z)$ が β に近づくとします．このとき

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \beta$$

と書き，$f(z)$ が極限値 β をもつといいます．この定義は実関数と似ていますが，複素関数では注意が必要です．すなわち，z が α に近づくとは $|z - \alpha|$ が 0 に近づくことを意味しており，近づき方は無数にあります．極限値をもつとは，近づき方によらずに一定の値になる場合を指します．

関数 $w = f(z)$ に対して，その定義域内の点 α について，極限値 $\lim_{z \to \alpha} f(z)$ が存在し，しかもその極限値が点 α における関数値に一致するとき，すなわち

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$$

が成り立つとき，関数 $w = f(z)$ は点 α において連続であるといいます．ある関数が領域 D 内のすべての点で連続であれば，その関数は領域 D で連続であるといいます．

関数の連続性については実関数の場合と同様に以下のことが成り立ちます．

Point

$f(z)$ と $g(z)$ が連続であれば

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z)g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)}$$

も連続である．ただし，除算の場合は $g(z) \neq 0$ とする．

1. 次式の値を求めなさい.

(a) $\operatorname{Im}\dfrac{2-i}{3-4i}$

(b) $\operatorname{Re}\dfrac{(1+i)^2}{3-2i}$

(c) $\left|\dfrac{3+4i}{3+i}\right|$

2. 次の複素数の絶対値と偏角を求めなさい.

(a) $-3-3i$

(b) $-1+\sqrt{3}i$

(c) $\dfrac{1+4i}{4-i}$

3. 次式が成り立つことを示しなさい.

$$\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(z_1z_2)+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\bar{z_1}z_2)$$

4. $z(i-1)=-\bar{z}(1+i)$ が成り立つとき，z の偏角を求めなさい.

5. $|1+z|\leq 1+|z|$ が成り立つことを $z=x+iy$ とおくことによって示しなさい．また, この式を用いて三角不等式 $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ を導きなさい.

6. 複素平面内に，次の式で表される領域または曲線を表しなさい.

(a) $\operatorname{Re}(z^2)\geq 1$

(b) $\dfrac{1}{|z|}\leq 2$

(c) $\operatorname{Re}(1-z)=|z|$

7. 次式が成り立つことを示しなさい.

$$\cos 4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta$$