コンパクトシリーズ　数学

ベクトル解析

河村哲也　著

インデックス出版

Preface

大学で理工系を選ぶみなさんは、おそらく高校の時は数学が得意だったのではないでしょうか。本シリーズは高校の時には数学が得意だったけれども大学で不得意になってしまった方々を主な読者と想定し、数学を再度得意になっていただくことを意図しています。それとともに、大学に入って分厚い教科書が並んでいるのを見て尻込みしてしまった方を対象に、今後道に迷わないように早い段階で道案内をしておきたいという意図もあります。

数学は積み重ねの学問ですので、ある部分でつまずいてしまうと先に進めなくなるという性格をもっています。そのため分厚い本を読んでいて、枝葉末節にこだわると読み終えないうちに嫌になるということが多々あります。このような時には思い切って先に進めばよいのですが、分厚い本だとまた引っかかる部分が出てきて、自分は数学に向かないとあきらめてしまうことになりかねません。

このようなことを避けるためには、第一段階の本、あるいは読み返す本は「できるだけ薄い」のがよいと著者は考えています。そこで本シリーズは大学の２～３年次までに学ぶ数学のテーマを扱いながらも重要な部分を抜き出し、一冊については本文は 70 ～ 90 頁程度（Appendix や問題解答を含めてもせいぜい 100 ～ 120 頁程度）になるように配慮しています。具体的には本シリーズは

微分・積分
線形代数
常微分方程式
ベクトル解析
複素関数
フーリエ解析・ラプラス変換
数値計算

の 7 冊からなり、ふつうの教科書や参考書ではそれぞれ 200 ～ 300 ページになる内容のものですが、それをわかりやすさを保ちながら凝縮しています。

なお、本シリーズは性格上、あくまで導入を目的としたものであるため、今後、数学を道具として使う可能性がある場合には、本書を読まれたあともう一度、きちんと書かれた数学書を読んでいただきたいと思います。

河村 哲也

目　次

Chapter 1

ベクトルの基礎

1.1　スカラーとベクトル

自然界にはいろいろな量が存在しますが，質量，温度，密度など大きさだけで決まる量を**スカラー**といいます．一方，力や位置など大きさおよび方向を指定してはじめて決まる量を**ベクトル**とよんでいます．本書では慣例に従い，スカラーを表すには a のようにふつうのアルファベットの文字を用い，ベクトルは $\vec{a}$ のように上に矢印をつけて表すことにします．そして，ベクトルの大きさだけを問題にするときは $|\vec{a}|$ のように絶対値記号をつけます．なお，大きさ 1 のベクトルを**単位ベクトル**といいます．

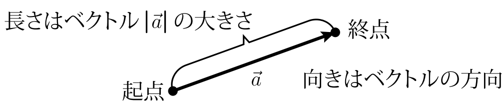


図 **1.1.1**

ベクトルを図形的に表すには図 1.1.1 に示すように矢印を用いるのが便利です．すなわち，矢印の方向をベクトルの方向にとり，矢印の長さをベクトルの大きさに（比例するように）とります．矢印の根元を**起点**（始点），先端を**終点**といいます．

ベクトルを物理学に用いる場合，ふつうは 3 次元空間で考えます．これを **3 次元ベクトル**といいます．しかし，場合によってはベクトルを 1 つの平面内に限っても十分なことがあります．このようなベクトルを 2 **次元ベクトル**といいます．

1.2　ベクトルの和と差とスカラー倍

　ベクトルにいくつかの演算規則を導入します．なお，これらの規則はベクトルとしてたとえば力をとったとき物理法則と矛盾しないようになっています．

（1）ベクトルの相等と零ベクトル

　ベクトルは大きさと向きをもつ量であるため，図 1.2.1 に示すようにそれぞれの大きさと向きが等しいとき，２つのベクトルは等しいと定義します（**ベクトルの相等**）．したがって，あるベクトルを平行移動したベクトルはすべて等しくなります．また大きさが 0 のベクトルを**零ベクトル**とよび，記号 0 で表します（方向は定義しません）．

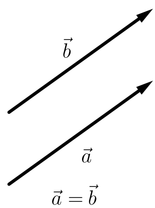


図 **1.2.1**

（2）ベクトルの和

　２つの**ベクトルの和**は図 1.2.2 のように２つのベクトルから作った平行四辺形の対角線を表すベクトルと定義します（**平行四辺形の法則**）. このとき図1.2.2 から，和について**交換法則**が成り立つことがわかります．

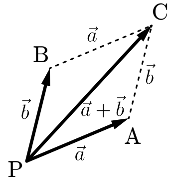


図 **1.2.2**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1.2.1}$$

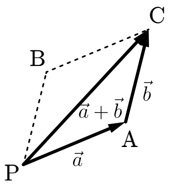


図 **1.2.3**

ベクトルの和 $\vec{a}+\vec{b}$ は，図 1.2.3 に示すように，ベクトル $\vec{a}$ の終点にベクトル $\vec{b}$ の起点を重ね，ベクトル $\vec{a}$ の起点とベクトル $\vec{b}$ の終点を結んだベクトルと考えることもできます（**三角形の法則**）．このとき，図 1.2.4 に示すように３つのベクトルの和に対して**結合法則**

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{1.2.2}$$

が成り立つことがわかります．

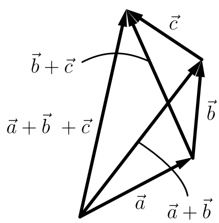


図 **1.2.4**

（３）ベクトルの差

あるベクトル $\vec{a}$ に対してベクトル $-\vec{a}$ を，

$$\vec{a}+(-\vec{a})=0 \tag{1.2.3}$$

となるベクトルで定義します．図 1.2.5 を見てもわかるように大きさが 0 でない２つのベクトルを加えて 0 になるのは，大きさが同じで逆向きの場合だけです（それ以外は平行四辺形が描けるため和が 0 ベクトルになりません）．

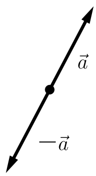


図 **1.2.5**

２つの**ベクトルの差**は和を用いて

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \tag{1.2.4}$$

と定義します．図形的にはまず $\vec{b}$ と同じ大きさで逆向きのベクトル $-\vec{b}$ を描き，$\vec{a}$ との和を作ります（図 1.2.6）．

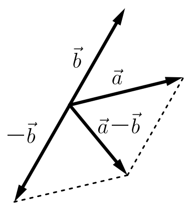


図 **1.2.6**

（４）スカラー倍

k を正の実数としたとき，ベクトル $k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが k 倍のベクトルと定義します（図 1.2.7）．k が負の場合には，ベクトル $\vec{a}$ と逆向きで大きさが $|k|$ 倍のベクトルと定義します．たとえば $-2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と逆向きで大きさは $|-2|=2$ 倍のベクトルになります．このように実数とベクトルの積をベクトルの**スカラー倍**といいます．

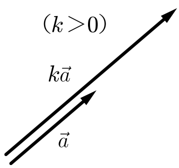


図 **1.2.7**

ベクトルのスカラー倍に対して次の関係が成り立ちます（**分配法則**）．

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \tag{1.2.5}$$

$$(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a} \tag{1.2.6}$$

1.3　スカラー積とベクトル積

ベクトルは大きさと方向をもった量であるため，ベクトルどうしの積といった場合には，ふつうのスカラーどうしの積のような定義はできません．本節では２つのベクトルからひとつのスカラーをつくる演算と，２つのベクトルから新たなベクトルをつくる演算を定義します．

（１）スカラー積

２つのベクトルからスカラーをつくる演算に**スカラー積**があります．スカラー積の記号として $\vec{a}\cdot\vec{b}$ というように中黒の点で表すことにすれば，スカラー積は θ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度として

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{1.3.1}$$

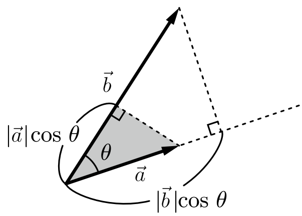


図 **1.3.1**

で定義されます（図 1.3.1）．この定義から２つのベクトルが直交していれば，$\cos\theta = 0$ であるため，スカラー積は 0 になります．さらに，同じベクトルのなす角は 0 なので

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$$

となります．したがって，

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \tag{1.3.2}$$

が成り立ちます．なお，スカラー積は**内積**ともいいます．

スカラー積に対しては交換法則と分配法則が成り立ちます：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \tag{1.3.3}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c},\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \tag{1.3.4}$$

（2）ベクトル積

次に２つのベクトルから新たなベクトルをつくる演算である**ベクトル積**を定義します．ただし，ベクトルとして３次元ベクトルをとります．２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平面を考えたとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積は，

「ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平面に垂直な方向（ただし $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ねじをまわしたとき[*1] ねじの進む方向）をもち，大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形の面積に等しいようなベクトル」

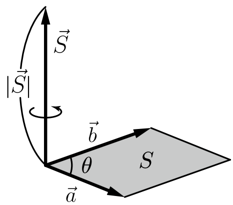


図 **1.3.2**

で定義されます（図 1.3.2）．ベクトル積は**外積**ともよばれます．ここで，２つのベクトルのなす角を θ とすれば，平行四辺形の面積 S は図 1.3.3 から

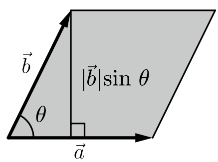


図 **1.3.3**

$$S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \tag{1.3.5}$$

となります．２つのベクトルが平行のときは $\theta=0$ であるため，ベクトル積は零ベクトル 0 になります．

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積を記号 $\vec{a}\times\vec{b}$ で表します．$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に右ねじを

＊1　まわし方をひとつにするため，まわす角度は 0°から 180°までとします．

まわす場合と$\vec{b}$から$\vec{a}$に右ねじをまわす場合では向きが逆になります．しかし，どちらの場合も平行四辺形の面積は同じであるため，関係式

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{1.3.6}$$

が成り立ちます. このことはベクトル積に関しては交換法則は成り立たない(あるいは修正される）ことを意味しています．さらに，後述するように結合法則も成り立ちません．ただし，分配法則は成り立ちます.

Point

一般に

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{1.3.7}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{1.3.8}$$

Example 1.3.1

$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ から$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$という量をつくったとき，これは$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ で作られる平行六面体の体積になっていることを，内積と外積の定義を用いて示しなさい.

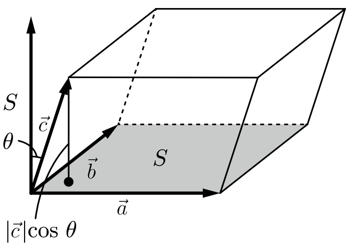


図 **1.3.4**

［Answer］

$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = ||\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta|$ ですが，図 1.3.4 に示すように，$||\vec{c}|\cos\theta|$ は$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ からつくられる平行六面体の高さです．一方，定義から$|\vec{a} \times \vec{b}|$はベクトル$\vec{a}$,$\vec{b}$ からつくられる平行四辺形の面積です．底面積×高さは平行六面体の体積であるため，$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$は平行六面体の体積になります.

Note ....

スカラー積とベクトル積の分配法則

スカラー積に対して分配法則$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$が成り立つことは以下のように示すことができます.

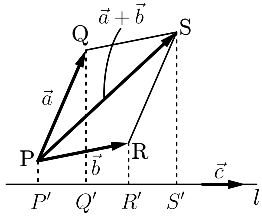


図 **1.3.5**

図 1.3.5 を参照して，ベクトル$\vec{c}$がその上にあるような直線 l 上に，点 P, Q, R, S を正射影してできる点を P', Q', R', S' とします．このとき，図から

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=P'S'|\vec{c}| \quad \vec{a}\cdot\vec{c}=P'Q'|\vec{c}| \quad \vec{b}\cdot\vec{c}=P'R'|\vec{c}|$$

です．一方，四角形 PQRS は平行四辺形なので $P'S'=P'Q'+P'R'$ が成り立ちます．したがって，

$$P'S'|\vec{c}|=P'Q'|\vec{c}|+P'R'|\vec{c}|$$

となるため，式(1.3.4) が成り立ちます.

ベクトル積に対して分配法則が成り立つことを示す前に, ベクトル $\vec{c}$ に垂直な面にベクトル $\vec{a}$ を正射影したときに得られるベクトルを $\vec{a}'$ とすれば, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}'\times\vec{c}$ が成り立つことを示します.

図 1.3.6 を参照すると，$\vec{a}\times\vec{c}$ と $\vec{a}'\times\vec{c}$ は同じ方向であることがわかります. さらに図から $\vec{a}$ と $\vec{c}$ がつくる平行四辺形の面積と $\vec{a}'$ と $\vec{c}$ がつくる長方形の面積は同じになります．すなわち，$|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{a}'\times\vec{c}|$ となります．したがって，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}'\times\vec{c}$ が成り立ちます.

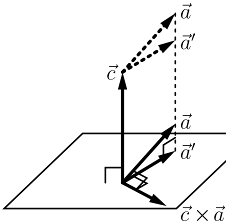


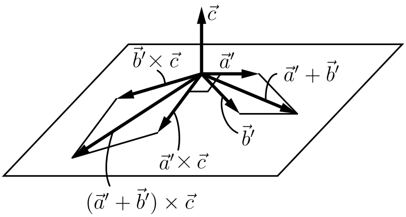
図 **1.3.6**

この結果から，もし $(\vec{a}'+\vec{b}')\times\vec{c}=\vec{a}'\times\vec{c}+\vec{b}'\times\vec{c}$ が証明できれば

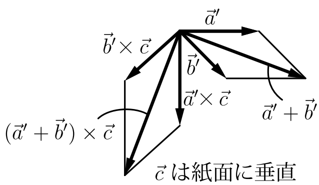
$$(\vec{a}'+\vec{b}')\times\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c},\quad \vec{a}'\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c},\quad \vec{b}'\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}$$

であるため, 分配法則 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ が示されたことになります.

さて，$\vec{a}'$ は $\vec{c}$ に垂直であるので，$|\vec{a}'\times\vec{c}|=|\vec{a}'||\vec{c}|$ であり，また $\vec{a}'\times\vec{c}$ は $\vec{a}'$ と $\vec{c}$ に垂直です．したがって, 図 1.3.7 に示すように $\vec{c}$ に垂直な面内で $\vec{a}'$ を 90° 回転して $|\vec{c}|$ 倍したものが $\vec{a}'\times\vec{c}$ になります．同様に同じ面内で $\vec{b}'$ を 90° 回転して $|\vec{c}|$ 倍したものが $\vec{b}'\times\vec{c}$ になります．この２つを加えたものは，やはり図を参照すれば $\vec{a}'+\vec{b}'$ を 90° 回転して $|\vec{c}|$ 倍したもの，すなわち $(\vec{a}'+\vec{b}')\times\vec{c}$ と等しいことがわかります．したがって，$(\vec{a}'+\vec{b}')\times\vec{c}=\vec{a}'\times\vec{c}+\vec{b}'\times\vec{c}$ が成り立ちます.



(a)



(b)

図 **1.3.7**

1.4　ベクトルと成分

図 1.4.1 に示すように空間内に直角座標を導入して，ベクトル $\vec{p}$ の起点が原点と一致するように平行移動し，ベクトルの終点の座標が $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ になったとします．$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ をそれぞれ $x,\ y,\ z$ 軸の正方向の単位ベクトル（基本ベクトル）とすれば，このベクトルは

$$\vec{p} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \tag{1.4.1}$$

と書けます．x_1 をベクトルの x 成分，y_1 をベクトルの y 成分，z_1 をベクトルの z 成分とよびます．このとき，式(1.4.1) は，**成分**を用いて $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ と記すこともできます．２次元の場合には $\vec{k} = 0$ として，$\vec{p} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$，または座標値を用いて $\vec{p} = (x_1, y_1)$ と記すことができます．

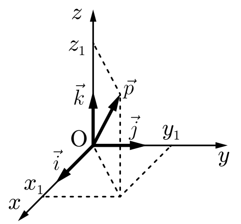


図 **1.4.1**

２次元のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の**成分表示**をそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$ とすれば，図 1.4.2 から平行四辺形の頂点 C の座標は $(a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$ となります．したがって，２つのベクトルの和の成分は対応する成分ごとに和をとればよく，$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$，$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ から，

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} \tag{1.4.2}$$

という計算ができることを意味しています．

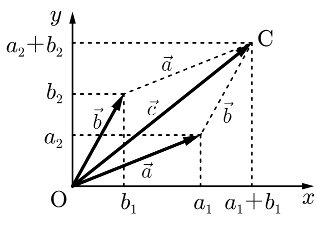


図 **1.4.2**

3次元の場合にも同様に $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ，$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ のとき

$$\vec{c} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k} \tag{1.4.3}$$

となります．同様に，ベクトルの差も対応する成分ごとの差になります．

スカラー倍については次のようになります．２次元のベクトル $\vec{a}$ の成分表示を $(a_1,\ a_2)$ としたとき，$k\vec{a}$ の成分は図 1.4.3 から $(ka_1,\ ka_2)$ となります．すなわち，ベクトルの k 倍は各成分をそれぞれ k 倍すればよく，$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ のとき

$$k\vec{a} = k(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) = ka_1\vec{i} + ka_2\vec{j} \tag{1.4.4}$$

という計算ができることを意味しています．３次元の場合も同様に $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ のとき

$$k\vec{a} = k(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) = ka_1\vec{i} + ka_2\vec{j} + ka_3\vec{k} \tag{1.4.5}$$

となります．

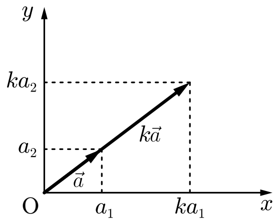


図 **1.4.3**

Example 1.4.1

$\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$，$\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ のとき次の計算をしなさい．

(1) $2\vec{a} + \vec{b}$　　(2) $3\vec{a} - 4\vec{b}$

[Answer]

(1) $2\vec{a}+\vec{b} = 2(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})+(-3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})$

$= (4-3)\vec{i}+(-6+2)\vec{j}+(2-4)\vec{k} = i-4\vec{j}-2\vec{k}$

(2) $3\vec{a}-4\vec{b} = 3(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})-4(-3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})$

$= (6+12)\vec{i}+(-9-8)\vec{j}+(3+16)\vec{k} = 18\vec{i} - 17\vec{j} + 19\vec{k}$

1. 次の関係を証明しなさい.

   (a) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

   (b) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{b}\times\vec{a}$

2. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を２辺とする平行四辺形の面積は

   $$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

   となることを示しなさい.

3. ３つのベクトル

   $$\vec{A}=a\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\,,\quad \vec{B}=-2\vec{i}+b\vec{j}+\vec{k}\,,\quad \vec{C}=\vec{i}+2\vec{j}-c\vec{k}$$

   が直交するように，a, b, c の値を定めなさい.

4. 図 1 に示すように面 S の法線ベクトル $\vec{n}=(n_x, n_y, n_z)$ と S を各座標平面に正射影したときの面積 ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z の間には

   $$\Delta \mathrm{S}_x = n_x\Delta \mathrm{S},\quad \Delta \mathrm{S}_y = n_y\Delta \mathrm{S},\quad \Delta \mathrm{S}_z = n_z\Delta \mathrm{S}$$

   の関係が成り立つことを示しなさい.

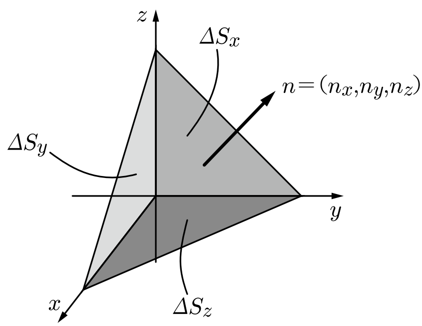


図 1

5. ベクトルに関する次の等式を証明しなさい.

   (a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$

   (b) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$