

コンパクトシリーズ 数学

常微分方程式

河村哲也 著

インデックス出版

Preface

大学で理工系を選ぶみなさんは、おそらく高校の時は数学が得意だったのではないのでしょうか。本シリーズは高校の時には数学が得意だったけれども大学で不得意になってしまった方々を主な読者と想定し、数学を再度得意になっていただくことを意図しています。それとともに、大学に入って分厚い教科書が並んでいるのを見て尻込みしてしまった方を対象に、今後道に迷わないように早い段階で道案内をしておきたいという意図もあります。

数学は積み重ねの学問ですので、ある部分でつまずいてしまうと先に進めなくなるという性格をもっています。そのため分厚い本を読んでいて、枝葉末節にこだわると読み終えないうちに嫌になるということが多々あります。このような時には思い切って先に進めばよいのですが、分厚い本だとまた引っかかる部分が出てきて、自分は数学に向かないとあきらめてしまうことになりかねません。

このようなことを避けるためには、第一段階の本、あるいは読み返す本は「できるだけ薄い」のがよいと著者は考えています。そこで本シリーズは大学の2～3年次までに学ぶ数学のテーマを扱いながらも重要な部分を抜き出し、一冊については本文は70～90頁程度（Appendix や問題解答を含めてもせいぜい100～120頁程度）になるように配慮しています。具体的には本シリーズは

微分・積分

線形代数

常微分方程式

ベクトル解析

複素関数

フーリエ解析・ラプラス変換

数値計算

の7冊からなり、ふつうの教科書や参考書ではそれぞれ200～300ページになる内容のものですが、それをわかりやすさを保ちながら凝縮しています。

なお、本シリーズは性格上、あくまで導入を目的としたものであるため、今後、数学を道具として使う可能性がある場合には、本書を読まれたあともう一度、きちんと書かれた数学書を読んでいただきたいと思います。

河村 哲也

Chapter 6

級数解法	59
6.1 級数解法の例	59
6.2 線形 2 階微分方程式の級数解法	63
Problems Chapter 6	70

Appendix A

連立微分方程式とラグランジュの偏微分方程式	71
A.1 連立微分方程式	71
A.2 ラグランジュの偏微分方程式	74
Problems Appendix A	77

Appendix B

力学への応用	78
B.1 自由落下運動	78
B.2 単振動	80
Problems Appendix B	84

Appendix C

微分方程式の解法のまとめ	85
C.1 1 階微分方程式の解法	85
C.2 2 階微分方程式の解法	87
C.3 高階微分方程式・連立微分方程式・ラグランジュの偏微分方程式	89

Appendix D

問題略解	90
Chapter 1	90
Chapter 2	90
Chapter 3	91
Chapter 4	92
Chapter 5	93
Chapter 6	94
Appendix A	96
Appendix B	96

微分方程式

1.1 微分方程式の種類

すぐあとに具体例をいくつかあげますが、関数やその導関数を含んだ関係式があり、それを関数を求める方程式とみなしたとき、**微分方程式**とよんでいます。特に取り扱う関数が1変数の関数の場合を常微分方程式、2変数以上の関数の場合を偏微分方程式とよんで区別しますが、本書で取り扱うのは常微分方程式がほとんどなので、常微分方程式を単に微分方程式とよぶことにします。

用語を説明するために微分方程式の具体例を5つあげることにします。ただし、求めるべき関数（未知関数）は y であり、 y は x の関数であるとします。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g \quad (g: \text{定数}) \quad (1.1.1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 4y^2 \quad (1.1.2)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (1.1.4)$$

$$y \log \left(\frac{dy}{dx} \right) = x \frac{dy}{dx} \quad (1.1.5)$$

このうち式(1.1.2)と式(1.1.5)は未知関数 y の最高階の導関数が1階なので1階微分方程式とよびます。同様に、式(1.1.1)と式(1.1.3)は最高階の導関数が2階なので2階微分方程式、式(1.1.4)は3階微分方程式です。

微分方程式が未知関数に対して線形るとき、**線形微分方程式**とよびます。上の例では線形微分方程式は式(1.1.1)と式(1.1.3)だけで、それ以外是非線形

(線形でないこと)です。なぜなら、未知関数 y について線形でない項 (y^2 , $y d^2y/dx^2$, $y \log(dy/dx)$) が方程式の中にあるからです。

さらに、微分方程式が、最高階の微分について解けた形をしている場合、あるいは簡単にそのようにできる場合を**正規形**、それ以外を**非正規形**とよびます。したがって、式(1.1.1)と式(1.1.2)は形の上から正規形ですが、式(1.1.3)と式(1.1.4)も簡単に正規形に直せるため正規形とみなせます。一方、式(1.1.5)は非正規形になります。

なお、上記のすべての例では未知関数(従属変数)がひとつですが、未知関数が複数個の場合もあります。一般に、未知関数が複数個ある場合、微分方程式も未知関数と同じ個数必要で、それらを連立させて解くことになります。このような微分方程式を**連立微分方程式**とよんでいます。たとえば

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 3y - 4z \\ \frac{dz}{dx} &= 3z - 2y\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

は y と z を x の未知関数とする連立微分方程式です。

1.2 実在現象と微分方程式

実在現象を数学的に記述する場合に微分方程式がしばしば現れます。ここでは特に重要なニュートンの**運動方程式**を取り上げます。この方程式は、質点の運動を表すニュートンの運動の第2法則、(質量×加速度=力)を微分方程式で記述したものです。いま、例として**自由落下**する物体を考えます。ある決まった点(たとえば地面)から測った質点の位置(鉛直距離)を y とすれば、質点の速度と加速度はそれぞれ dy/dt と d^2y/dt^2 となります。ここで t は時間です。質点の質量を m 、**重力加速度**を g とすれば、落下する物体には重力 $-mg$ (負の符号は下向きを意味します)が働きます。重力以外の力(たとえば空気抵抗)が無視できるとすれば、ニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg\tag{1.2.1}$$

となります。両辺を m で割って、 t を改めて x と書くことにすれば、この方

程式は式(1.1.1)と同じになります。なお、加速度は時間に関する2階微分なのでニュートンの運動方程式は必然的に2階微分方程式になります。

式(1.1.1)を解くことを考えます。 $v=dy/dx$ とおけば $dv/dx=d^2y/dx^2$ となります。ここで、 v は**速度**という意味をもっています。このとき、式(1.1.1)は

$$\frac{dv}{dx} = -g \quad (1.2.2)$$

と書けます。これは v に対する1階微分方程式です。 v を微分したものが定数 $-g$ なので、この式を1回(不定)積分すれば

$$v = -gx + C \quad (1.2.3)$$

となります。ここで C は積分定数で定数であれば任意の値をとることができます。実際、式(1.2.3)を微分すれば C は消えて式(1.2.2)にもどります。このように、1階微分方程式の解には1つの**任意定数**が現れます。

式(1.2.3)を y で表せば

$$(v=) \frac{dy}{dx} = -gx + C \quad (1.2.4)$$

となるので、これをもう1度 x で積分すれば、

$$y = -\frac{1}{2}gx^2 + Cx + D \quad (1.2.5)$$

となります。ここで D は任意定数です。このように2階微分方程式の解は2つの任意定数(今の場合は C, D)をもつことになります。

以上のことから類推されますが、一般に n 階微分方程式は n 個の任意定数を含んだ解をもちます。このような解を微分方程式の**一般解**とよんでいます。逆に任意定数を含んだ解から微分を使って任意定数を消去するともとの微分方程式が得られます。

質点の自由落下運動に戻ります。質点の運動は、質点がある特定の時間に特定の位置にあり、特定の速度をもっていると一通りに決めることができます。特定の時間には初期の時間($x=0$)をとることが多いので、 $x=0$ のとき $y=y_0, v(=dy/dx)=v_0$ という条件を課すことにします。このとき、式(1.2.3)において $x=0$ を代入すれば $C=v_0$ 、すなわち

$$v = -gx + v_0 \quad (1.2.6)$$

となり、さらに式(1.2.5) から $D=y_0$, すなわち

$$y = -\frac{1}{2}gx^2 + v_0x + y_0 \quad (1.2.7)$$

という解が得られます。このように、ある特定の条件を満たす解を**特解**とよんでいます。

y_0 を地面から測った距離とすれば、式(1.2.7) から質点が地面に到達する時間は

$$0 = -\frac{1}{2}gx^2 + v_0x + y_0$$

すなわち、

$$gx^2 - 2v_0x - 2y_0 = 0$$

という2次方程式を解けばよいので

$$x = (v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0})/g \quad (1.2.8)$$

となります。ただし、時間 x は 0 から測っているため正の値をとるはずなので複号はプラスをとっています。このとき、質点が地面にぶつかる速度は、式(1.2.6) から

$$v = -(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}) + v_0 = -\sqrt{v_0^2 + 2gy_0} \quad (1.2.9)$$

となります。なお、運動方程式には質点の質量は現れていないため、どんな物体でもこれらの値は同じになります。

1. 次の微分方程式が括弧内の一般解または特解をもつことを代入することにより確かめなさい (A, B, C : 定数).

(a) $\frac{dy}{dx} = xy$ ($y = C \exp(x^2/2)$)

(b) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$ ($y = C(x+C)$)

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ ($y = Ae^x + Be^{2x}$)

2. 次の関数を一般解にもつような微分方程式を任意定数を消去することにより求めなさい (A, B, C : 定数).

(a) $y = \cos(x+C)$

(b) $y = A \log x + x$

(c) $y = Ax + \frac{B}{x}$

(d) $y = A \cos(x+B)$