コンパクトシリーズ　数学

線形代数

河村哲也　著

インデックス出版

Preface

大学で理工系を選ぶみなさんは、おそらく高校の時は数学が得意だったのではないでしょうか。本シリーズは高校の時には数学が得意だったけれども大学で不得意になってしまった方々を主な読者と想定し、数学を再度得意になっていただくことを意図しています。それとともに、大学に入って分厚い教科書が並んでいるのを見て尻込みしてしまった方を対象に、今後道に迷わないように早い段階で道案内をしておきたいという意図もあります。

数学は積み重ねの学問ですので、ある部分でつまずいてしまうと先に進めなくなるという性格をもっています。そのため分厚い本を読んでいて、枝葉末節にこだわると読み終えないうちに嫌になるということが多々あります。このような時には思い切って先に進めばよいのですが、分厚い本だとまた引っかかる部分が出てきて、自分は数学に向かないとあきらめてしまうことになりかねません。

このようなことを避けるためには、第一段階の本、あるいは読み返す本は「できるだけ薄い」のがよいと著者は考えています。そこで本シリーズは大学の２～３年次までに学ぶ数学のテーマを扱いながらも重要な部分を抜き出し、一冊については本文は 70 ～ 90 頁程度（Appendix や問題解答を含めてもせいぜい 100 ～ 120 頁程度）になるように配慮しています。具体的には本シリーズは

微分・積分
線形代数
常微分方程式
ベクトル解析
複素関数
フーリエ解析・ラプラス変換
数値計算

の 7 冊からなり、ふつうの教科書や参考書ではそれぞれ 200 ～ 300 ページになる内容のものですが、それをわかりやすさを保ちながら凝縮しています。

なお、本シリーズは性格上、あくまで導入を目的としたものであるため、今後、数学を道具として使う可能性がある場合には、本書を読まれたあともう一度、きちんと書かれた数学書を読んでいただきたいと思います。

河村 哲也

Contents

Chapter 1

行　　列

1.1　連立 1 次方程式と行列

本書で述べる行列の典型的な例として連立 1 次方程式の係数を 2 次元的に並べたものがあります．たとえば，連立 3 元 1 次方程式

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

に対して，左辺の係数のみ，および右辺を含めて並べて作った数字の組

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \tag{1.1.2}$$

は行列です．このようにいくつかの数字の組を 2 次元的に長方形（正方形を含む）の形に配置し，括弧でくくったものを**行列**とよんでいます．特に上記の左の例は正方形の形をしているため**正方行列**といいます．行列において数字の横の並びのそれぞれを横書きの本の場合と同じく**行**とよびます．一方，縦の数字の並びのそれぞれを**列**とよびます．また行列を形づくる個々の数字を行列の**要素**とよんでいます．したがって，上の例では左側は行が 3 で列が 3 の行列であり, 9 個の要素があります．同様に右側では行が 3 で列が 4 の行列であり，12 個の要素があります．またこれらの行列をそれぞれ 3 行 3 列および 3 行 4 列の行列とよびます．さらに要素を指定するため，その要素の行の番号と列の番号を並べて，たとえば (1,2) 要素などと記します．これは 1 行 2 列目の位置にある要素（式(1.1.2）では a_{12}）のことです．

今の時点では，行列とはただ単に数字を長方形に並べたものにすぎません．ただし，これから述べる種々の演算規則を導入することにより行列は非常に便利な性質をもつようになります．

さて，

（a）　行列の行を定数倍（0 倍を除く）する操作

（b）　行列のある行に定数を掛けて他の行と加減を行う操作[*1]

（c）　行列の行の入れ換えを行う操作

の 3 つの操作を行列の**基本変形**といいます．この基本変形を行うと行列の要素は変化しますが，もとになる連立 1 次方程式の解は変化しません．このことは，連立 1 次方程式を消去法で解くときの手順を思い出せば容易に理解できます．いま基本変形を何回か行って行列(1.1.2）が

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

となったとします．具体的にはまず行列(1.1.2）の 1 行目に着目して 2 行目以下の 1 列目の要素が 0 になるようにします．そのため 1 行目を a_{21}/a_{11} 倍して 2 行目から引き，また 1 行目を a_{31}/a_{11} 倍して 3 行目から引くと

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \end{bmatrix}$$

という形になります．次にこの行列の 2 行目に着目して 3 行目の 2 列目が 0 になるように，2 行目に a'_{32}/a'_{22} をかけて 3 行目から引きます．その結果，式(1.1.3）となります．なお，この手順からわかるように行列の要素は順に変化します．この例ではダッシュが 1 つのものは 1 回変化したこと，ダッシュが 2 つのものは 2 回変化したことを表しています．また，第 1 回目の操作では $a_{11} \neq 0$，第 2 回目の操作では $a'_{22} \neq 0$ であることを仮定しており，この仮定が成り立たない場合には行の入れ替えを行う必要があります．ここで連立 1 方程式にもどれば

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \quad +a_{12}x_2 \quad +a_{13}x_3 &= a_{14} \\ a'_{22}x_2 \quad +a'_{23}x_3 &= a'_{24} \\ a''_{33}x_3 &= a''_{34} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

＊1　正確にいえば行列のふたつの行に注目してひとつの行の各要素を定数倍した上で，列ごとにもうひとつの行の要素と加減を行う操作．

という形になります．この方程式はその形から**上三角型**とよばれます．上三角型の方程式は簡単に解くことができます．すなわち，式(1.1.4) の 1 番下の式から x_3 を求め，次にこの x_3 を下から 2 番目の式に代入して x_2 を求め，最後に x_2 と x_3 を 1 番上の式に代入して x_1 を求めます．この手続きを**後退代入**といいます．なお，もとの方程式を上三角型する操作を**前進消去**といい，前進消去と後退代入によって連立 1 次方程式を解く方法を**ガウスの消去法**とよんでいます.

ガウスの消去法と類似の方法に**掃き出し法**があります．上記の例で説明するとまず 1 行目を a_{11} で割って $(1,1)$ 要素を 1 にしてから，下 2 行から第 1 列目の要素を 0 にします．次に 2 行目を a'_{22} で割って $(2,2)$ 要素を 1 にしてから 3 行目および 1 行目から，第 2 列目が 0 になるようにします.
このときの計算により第 1 列目の要素は影響を受けません．最後に 3 行目を a'_{33} で割って $(3,3)$ 要素を 1 にして，上の 2 行から第 3 列目を 0 になるようにします．この計算により第 1,2 列目の要素は変化しません．着目している行より下の部分を計算するガウスの消去法に比べ，掃き出し法は上の部分まで計算するため計算量は多くなります．しかし, これらの消去計算が終わった時点で, 行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a''_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a''_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a''_{34} \end{bmatrix}$$

という形になっています．したがって，もとの方程式に戻れば 4 列目がそのまま解です．すなわち，掃き出し法では後退代入を行う必要はありません.

Example 1.1.1

$$\begin{aligned} 3x - 12y + 9z &= -3 \\ 2x - 5y + 4z &= 0 \\ -2x + 9y - 7z &= 2 \end{aligned}$$

をガウス消去法および掃き出し法を用いて解きなさい.

［**Answer**］

行列の基本変形を用いて，ガウスの消去法で解けば，

$$\begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & -3 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ -2 & 9 & -7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -12 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

のようになります．なお，この変形において 1 番目の行列から 2 番目の行列に変形するには，1 番目の行列の第 1 行を $(-2/3)$ 倍して第 2 行に足し，同様に第 1 行を $(2/3)$ 倍して第 3 行に足しています．また 2 番目の行列から 3 番目の行列に変形するには第 2 行を $(-1/3)$ を第 3 行に足しています．最後の行列を連立 1 次方程式の形にすれば

$$\begin{aligned} 3x \; -12y \; &+9z &= -3 \\ 3y \; &-2z &= 2 \\ &-z/3 &= -2/3 \end{aligned}$$

となるため，前述のように下から順に解くことができて，解として

$$z=2, \quad y=2, \quad x=1$$

が得られます．

同様に掃き出し法の場合に第 1 行を 3 で割ったあとは次のようになります．

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ -2 & 9 & -7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. 次の行列の階数を求めなさい.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

2. 次の連立 1 次方程式が解をもつための条件，およびそのときの解を求めなさい.

$$2x+3y+4z=a$$
$$3x+4y+5z=b$$
$$4x+5y+6z=c$$

3. 次の計算を行いなさい.

(a) $2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. 正方行列 A の対角要素の和 $\mathrm{Tr}A$ に対し, A, B を n 次の正方行列とした場合, 次式が成り立つことを示しなさい.

(a) $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$

(b) $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$

5. n を正の整数としたとき次式を計算を行いなさい.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}^n$$

6. 次の行列の逆行列を求めなさい.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ $(abc \neq 0)$

7. $A^2 - A + I = 0$ のとき A は正則行列で，$I - A$ は A の逆行列であることを示しなさい.