

Chapter 1

音波の計算

音波の計算については「流体シミュレーションの応用Ⅱ」の付録でも述べましたが、精度が要求されること、および現実問題に適用する場合には領域が広いことが多いこと、したがって必要とされる格子数が膨大になるといった難しさがあります。計算精度を上げるためには差分近似に用いる格子点を増やせばよいのですが、境界における取扱いが難しくなります。一方、少数の格子点で高精度の差分近似を行う方法に陰的な差分という考え方があります。他のシリーズでは言及しなかったため、本章で簡単に紹介します。また、音響の計算において、ある特定部分の情報が必要であっても仮想的に設けた境界での反射の影響を少なくするため、領域を必要以上に広くとる必要があります。この問題は、音波を完全に吸収する壁面境界をつくることができれば解決します。そこで、完全吸収をかなりよく実現できる PML 法についても簡単に紹介します。

1.1 基礎方程式と高精度差分法

「流体シミュレーションの応用Ⅱ」の付録では音波の基礎方程式として3次元波動方程式を用いる方法を示しました。別の方法として、波動方程式のもとになる線形化オイラー方程式

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} + Q \quad (1.2)$$

を直接解くことも考えられます。ここで p は基準圧力からの差、 \mathbf{v} は流速ベクトル、 Q は音源（体積速度）を表します。また ρ_0 は平均密度、 c は音速で、方程式を無次元化する場合には両方とも 1 にとりますが、以下では無次元化することにします。音源については、たとえば一点 (x_0, y_0, z_0) にあり、時間に関して正弦関数的に振動し、空間に関して指数関数的に減衰する場合は

$$Q = A \sin(\omega t + b) \exp(-(x - x_i)^2 - (y - y_i)^2 - (z - z_i)^2) \quad (1.3)$$

とします。ここで A は音源の強さを表します。

式 (1.1), (1.2) を見てもわかるように基礎方程式には 1 階微分が現れますが、ある関数 f の 1 階微分を、陰的に評価して少ない格子点でも高精度の近似を得るという陰的な差分法があり、**コンパクト差分法**とよばれています。具体的にはスタガード格子を用いて

$$\alpha f'_{i+1} + f'_i + \alpha f'_{i-1} = b \frac{f_{i+3/2} - f_{i-3/2}}{3h} + a \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{h} + c \quad (1.4)$$

$$a = \frac{3}{8}(3 - 2\alpha), \quad b = \frac{22\alpha - 1}{8}, \quad c = \frac{9 - 62\alpha}{1920} h^4 f^{(5)}$$

と近似した場合には 4 次精度になります。特に $\alpha = 1/22$ にとることにより最も少ない格子点で差分近似式が構成できます。また、 $\alpha = 9/62$ のとき誤差項 c はなくなり 6 次精度になります。式 (1.4) を各格子点でつくり、境界での微分値を与えて左辺の未知数に対する 3 項方程式を解くことによって関数 f の 1 階微分の値 f' が求まります。

この方法を x, y, z 方向に適用することにより式 (1.1), (1.2) の空間微分が 4 次精度で近似できます。時間微分に関してはルンゲ・クッタ法を用います。なお、2 次元の場合の圧力と速度成分の評価点は図 1.1 のようになります。3 次元の場合も同様です。

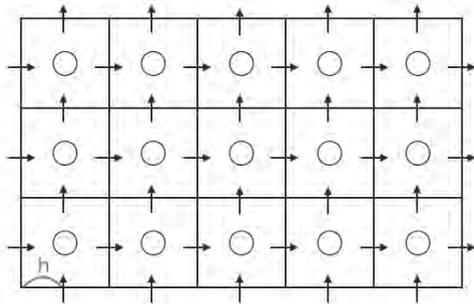


図 1.1 スタガード格子 (2 次元)

もちろん陽的な差分法を用いることもできます。その場合のメリットとしては不等間隔の格子でも手軽に差分近似式をつくれることがあげられます。境界

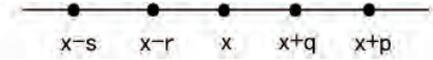


図 1.2 4次精度差分近似に対する格子点

を遠方にとる必要がある場合には不等間隔格子が有効になります．具体的には「流体シミュレーションの基礎」の付録 A で述べた方法を用います．4次精度の近似式をつくるためには図 1.2 に示すような格子点を用いて

$$df/dx = af(x+p) + bf(x+q) + ef(x) + cf(x-r) + df(x-s) \quad (1.5)$$

とおいた上で右辺の各項を x のまわりにテイラー展開すれば、係数として

$$\begin{aligned} a &= \frac{qrs}{p(p-q)(s+p)(r+p)} \\ b &= -\frac{prs}{q(p-q)(s+q)(r+q)} \\ c &= -\frac{pqs}{r(r-s)(r+p)(r+q)} \\ d &= \frac{pqr}{s(r-s)(s+p)(s+q)} \\ e &= -(a+b+c+d) \end{aligned} \quad (1.6)$$

ととった場合に4次精度になることがわかります．

1.2 無反射境界条件

音波の伝搬をシミュレーションするとき、たとえ音源近くの様子が知りたい場合でも、境界からの反射の影響を少なくするために境界を遠方にとる必要があります．

その場合、等間隔の格子を用いると格子数は膨大になるため、それを避けるには不等間隔の格子を用います．別の方法としては反射がないような境界条件を課して音波を通り抜けさせれば、狭い領域で計算できます．その1つの方法として「流体シミュレーションの応用II」の付録で述べたように境界で

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho = 0 \quad (1.6)$$

を課すというのがあります。しかし、この条件は近似的なもので反射波を完全には取り除けません。

より有効な方法に **PML** (Perfect Matched Layer) 法^{*1}があります。この方法はもともと電磁波の解析に用いられたものですが音波の問題にも適用できます^{*2}。考え方としては解析したい領域を取り囲むように音波の吸収層をつくりそこに伝わった波を効率的に減衰させるというものです。

具体的には吸収層内では基礎方程式に補正項 $\mathbf{v}_1 = (u_1, v_1, w_1)$, p_1 を加えた

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \mathbf{v}_1 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} + Q - p_1 \quad (1.8)$$

を解きます。ここで

$$\begin{aligned} u_1 &= m_4 u + n_4 \int u dt + n_5 \int \left(\int u dt \right) dt + m_1 \frac{\partial}{\partial x} \int p dt + n_1 \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\int p dt \right) dt \\ v_1 &= m_4 v + n_4 \int v dt + n_5 \int \left(\int v dt \right) dt + m_2 \frac{\partial}{\partial y} \int p dt + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\int p dt \right) dt \\ w_1 &= m_4 w + n_4 \int w dt + n_5 \int \left(\int w dt \right) dt + m_3 \frac{\partial}{\partial z} \int p dt + n_3 \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\int p dt \right) dt \\ p_1 &= m_4 p + n_4 \int p dt + n_5 \int \left(\int p dt \right) dt + m_1 \frac{\partial}{\partial x} \int p dt + n_1 \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\int p dt \right) dt \\ &\quad + m_2 \frac{\partial}{\partial y} \int p dt + n_2 \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\int p dt \right) dt + m_3 \frac{\partial}{\partial z} \int p dt + n_3 \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\int p dt \right) dt \end{aligned}$$

であり、式に現れるパラメータとして

$$\begin{aligned} m_1 &= \sigma_y + \sigma_z, & n_1 &= \sigma_y \sigma_z \\ m_2 &= \sigma_z + \sigma_x, & n_2 &= \sigma_z \sigma_x \\ m_3 &= \sigma_x + \sigma_y, & n_3 &= \sigma_x \sigma_y \\ m_4 &= (m_1 + m_2 + m_3)/2, & n_4 &= n_1 + n_2 + n_3, & n_5 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z \end{aligned}$$

^{*1} Berenger, J-P. "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves" Journal of Computational Physics 114, 185-200(1994).

^{*2} Tam, C.K.W. T. "Computational Acoustics : A Wave Number Approach (Cambridge Aerospace Series)", Cambridge University Press(2012).

をとります。ただし、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はそれぞれ x, y, z 方向の吸収率でたとえば 0.4 などとします。また吸収層の厚さは領域の大きさの 10 ~ 20% 程度とします。

1.3 計算例

上記の方法で計算した音波のシミュレーションの例を示します*3。取り上げたのは回転する音源から発生する音波で、具体的には風車騒音の伝播の簡単なモデルです。本来は風車のブレードが風を切ることにより音が発生しますがそのシミュレーションは難しいため、ここでは風車の先端に音源を設置しています。風車としては図 1.3(a) に示すプロペラ型風車と図 1.3(b) に示す垂直軸直線風車を想定し、風車の回転とともに音源も回転するとしています。図 1.4 に計算領域と音源を示しています。

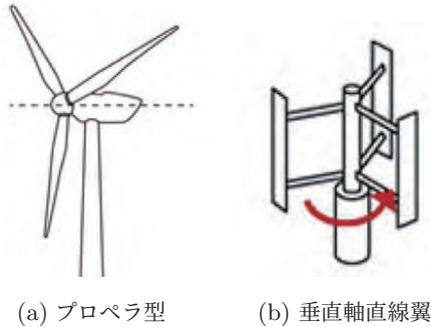


図 1.3 各種風車

計算方法はプロペラ風車に対しては、図 1.4(a) に示す狭い領域で $200 \times 200 \times 100$ の等間隔格子を用い、図の下面は地面を想定して反射条件、他の領域では PML 境界条件を課してします。吸収層の厚さは 30 格子で、1.2 節で述べた吸収に関するパラメータとして $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.4$ にとっています。空間方向には 4 次精度のコンパクト差分、時間積分には 4 次精度ルンゲ・クッタ法を用いています。風車が 1 回転するとき音源は 2 回振動するとしています。

*3 寺町幸希子：令和元年度お茶の水女子大学大学院理学研究科修士論文。

走行中の電車内のウィルスの拡散

例年のインフルエンザの感染者数は、国内で推定約 1000 万人と言われており、また 2019 年の冬から世界的に流行している新型コロナウイルス感染症 (COVID-19) の国内での 2020 年 3 月からの累計感染者数は 2021 年 5 月 20 日には 70 万人を超えました。インフルエンザや新型コロナウイルス感染症などのような発熱や咳を起こす感染症は高齢者や基礎疾患があるなど免疫力の低下している人には二次性の肺炎を伴う等、重症化するリスクが大変高くなります。これらの感染症の一般的な感染経路は飛沫感染、接触感染と言われており、飛沫感染の主な感染場所は学校や劇場、満員電車などの人が多く集まる場所です。

そこで、本章では主な通勤・通学手段である電車内における飛沫感染に着目し、窓を開けることや空調による感染対策の効果を、咳により呼出されたウィルスの車両内での移動や拡散の様子についてシミュレーションを行うことにより検討します*1。

6.1 モデル化・格子生成

6.1.1 モデル化

以下の図 6.1 のような長さ、幅、高さがそれぞれ 20m, 3m, 2m の直方体を車両に見立てます。また、電車は 10m/s (36km/h) で走行していると仮定します。

*1 佐々木桃：令和 2 年度お茶の水女子大学理学部情報科学科卒業論文。

Momo Sasaki and Tetuya Kawamura: Numerical Simulation of the diffusion of virus in the commuting train, Natural Science Report, Ochanomizu University, Vol. 72, No.1 (to appear).

6.1.2 格子生成

主な計算で用いた格子数は長さ方向に 200, 幅方向に 30, 高さ方向に 20 としましたが, 確認のため各方向にそれぞれ 2 倍にした格子も用いています.

車両モデルの内部に座席を用意し, また乗車率に合わせて人(障害物)をランダムに配置しています.

これら流れに対する障害物は**マスク**を用いることにより, すなわち障害物がある格子において流速を強制的に 0 にすることで表現しています. 具体的には流れの領域で 1, 障害物の領域で 0 である配列を用意し, 速度の配列に掛け合わせています.

6.2 計算方法

6.2.1 基礎方程式

取り扱う空気の流れは非圧縮性流体の流れとみなせるため, 連続の式 (6.1), 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式 (6.2)~(6.4) を使用します. また, ウィルス濃度 c と温度 (基準温度からの差) T は移流拡散方程式 (6.5), (6.6) を用いて計算します.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{Gr}{(\text{Re})^2} T \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot Sc} \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (6.6)$$

6.2.2 解法

数値解法にフラクショナルステップ法を用いています。

時間間隔は $\Delta t = 0.00125$ とし、支配パラメータであるレイノルズ数 Re 、グラスホフ数 Gr 、プラントル数 Pr 、シュミット数 Sc はそれぞれ 10^4 、 10^8 、 0.71 、 0.071 と設定しています。また、計算ステップ数は 50000 回で、これは計算終了時において実時間 6 秒に対応します。

空間の差分近似については、ナビエ・ストークス方程式の非線形項は 3 次精度上流差分、ただし境界より一つ内側のみ 1 次精度上流差分、その他の項には中心差分を用いました。

また、時間の差分近似については 1 次精度オイラー陽解法を使用しています。

6.2.3 境界条件

走行中の窓の開いた電車を想定し、窓の開いている部分から長さ方向に流れが入ってくるようにし、連結ドアの部分から流出すると仮定し、その速度の大きさは窓から入ってくる流量と同じになるように設定しています。また、天井にある空調からはスイングしながら車両内に流れが流入し、ダクトから流出するようにし、その速さは窓からの流速の 3 割としました。ダクトの部分の速度の大きさは、空調から入ってくる流量と同じになるように設定しています。

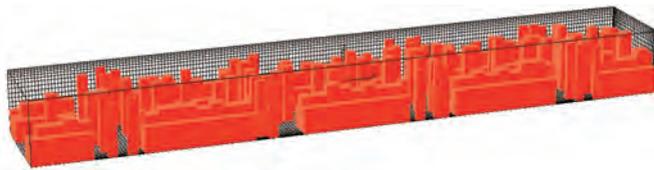


図 6.1 格子と座席および乗車率 100% (定員) のときの人の配置

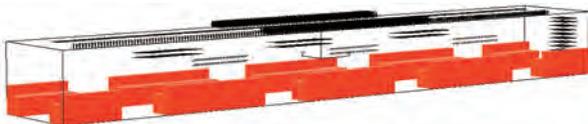


図 6.2 座席、窓、空調と後部ドアの位置