Chapter 1

圧縮性流れ

流速が音速のおよそ 3 割を超えると流体の圧縮性の効果が無視できなくなります．このような状況は飛行機まわりの流れなど航空分野の流体力学では普通に現れます．圧縮性を考慮に入れる場合には基礎方程式に質量保存，運動量保存，エネルギー保存のすべてが必要になりますが，それに加えて状態方程式など熱力学的関係式も使います．そのため，数学的な解析は非常に困難ですが，非圧縮性の場合もそうであったように，粘性を無視してよい場合には取り扱いはかなり簡略化されます．本章では非粘性の圧縮性流れの解析の基礎部分を簡単に紹介します．

1.1　音波

音はよく知られているように空気の密度（圧力）の高い部分と低い部分が空気中を伝播する現象です．したがって，もちろん流体力学的な現象ですが，密度変化を考慮しなければならない点において，非圧縮性の現象とは異なります．一方，音を取り扱う場合には空気の粘性は無視できます．

本節では，静止した流体にわずかに圧力（密度）変動を与えた場合に，それがどのように伝わるかを考えてみます．ただし，簡単のためその変動は 1 方向（x 方向）にのみ伝わるとします．

基礎方程式は密度変化まで考慮した連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

および，完全流体に対するオイラー方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.2}$$

になります．ただし，未知数は ρ，u，p の 3 つあるため，このままでは方程式は閉じません．そこで，圧力と密度の間に

$$p = f(\rho) \tag{1.3}$$

という状態方程式を仮定します（**バロトロピー流体**）．たとえば，流体が気体で，断熱変化する場合には

$$p = k\rho^{\gamma} \tag{1.4}$$

という関係があるため，式 (1.3) の特殊な場合になっています．ただし k は正の定数であり，また γ は**定圧比熱**を**定積比熱**で割った量（**比熱比**）で 2 原子分子の気体では 1.4 の値をもちます．

静止状態からのずれを問題にするため，u，p，ρ は

$$u = u', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho' \tag{1.5}$$

と書くことができます．ただし p_0，ρ_0 は静止状態の圧力と密度であり，またダッシュのついた量は微小な量であり，これらの量どうしの積は 0 とみなせるものとします．

式 (1.5) を式 (1.1)，(1.2) に代入してダッシュがついた項どうしの積の項を高次の微小量として無視すれば

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{1.7}$$

となります．一方，式 (1.3) から

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

となるため，これを式 (1.7) に代入すれば

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

となり，この式と式 (1.6) から ρ' を消去すれば

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \tag{1.8}$$

が得られます．同様に u' を消去すれば

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \tag{1.9}$$

が得られます．

式 (1.8)，(1.9) はどちらも同じ**波動方程式**であり，一般解

$$u' \ (\text{または } \rho') = f(x - at) + g(x + at) \tag{1.10}$$

をもつことは，これをもとの方程式に代入することにより簡単に確かめられます．ただし，f，g は任意の関数であり，また

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0} \tag{1.11}$$

は以下に示すように，音の伝わる速さ（**音速**）を表します．ここでまず式 (1.10) の右辺第 1 項 $f(x - at)$ について考えてみます．この式に $t = 0, 1, 2, \cdots$ を代入すると

$$f(x), \quad f(x-a), \quad f(x-2a), \cdots$$

というように関数 $f(x)$ を順に a ずつ右に平行移動した関数が得られます．すなわち，もとの関数が形を変えずに単位時間の間に a ずつ右にずれていくことを示しています（図 1.1 参照）．したがって，この項は速さ a で x の正方向に伝わる波を表しています．同様に第 2 項は速さ a で x の負方向に伝わる波を表します．したがって，a は密度変動が伝わる速さ，すなわち音速になります．

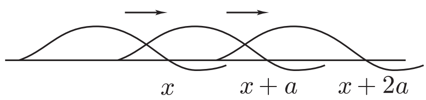

図 1.1　波動

流体が液体である場合には

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{K}{\rho} \tag{1.12}$$

となります．ここで K は**体積弾性率**であり水の場合 2.1GPa 程度です．そこで，音速は常温，常圧での水の密度 999 kg/m^3 を用いて，式 (1.11) から約 1450 m/s となります．

一方，**断熱変化**をする気体の場合には，式 (1.4) から

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}$$

となるため，音速は

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{1.13}$$

で与えられます．さらに，理想気体の場合には状態方程式

$$p = \rho \frac{R}{m} T$$

が成り立つため

$$a = \sqrt{\gamma \frac{R}{m} T} = \sqrt{\gamma (c_p - c_v) T} \tag{1.14}$$

となります．ただし、マイヤーの関係式 $c_p = c_v + R/m$ を用いています。ここで c_p, c_v はそれぞれ定圧比熱と定積比熱で

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

の関係があります．この式に $\gamma = 1.4$，$R/m = 287.1$ J/(kg · K)，$T = 287$ K を代入すれば a は約 340 m/s となります．

1.2　圧縮性非粘性流体の定常流れ

流体の圧縮性を考慮したとき，粘性および熱伝導性が無視できる流れの基礎方程式は熱源がない場合

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) S = 0 \tag{1.17}$$

となります．ここで，$\boldsymbol{\omega}= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ で渦度、また S は**エントロピー**です．これらは，それぞれ質量保存，運動量保存およびエネルギー保存の式を表しています．式 (1.17) は以下のようにして導けます．まず，エネルギー保存式，すなわち

$$\frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \Theta + \Phi + Q$$

において，粘性を無視するため散逸関数 Φ は 0 です．また，熱源はないので $Q = 0$ です．さらに，連続の式から

$$\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

が得られます．これらを考慮すればエネルギー保存式は

$$\frac{De}{dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \Theta \tag{1.18}$$

となります．一方，系の単位質量あたりに流入する熱量を δq とすれば**熱力学の第 1 法則**から

$$\delta q = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

となり[*1]，さらに**熱力学第 2 法則**から

$$\delta q = TdS$$

となるため

$$TdS = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{1.19}$$

が成り立ちます．したがって，流体の運動に沿った変化に対して

$$T\frac{DS}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{1.20}$$

となります．この式を用いれば，式 (1.18) は

$$T\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \Theta \tag{1.21}$$

[*1] 単位質量を考えているため，$1/\rho$ は体積に対応します．したがって，この式は熱を与えたとき（左辺），その熱は内部エネルギーの増加（温度上昇）（右辺第 1 項）と外圧に抗して膨張するときの仕事（右辺第 2 項）に使われることを示しています．