

# 線形偏微分方程式

線形偏微分方程式の差分解法のもっとも基本的な事項については本シリーズ 2 の「流体シミュレーションの基礎」で説明しました。しかし、線形偏微分方程式は流体力学のみならず物理や工学の各分野で頻繁に現れる非常に重要な方程式であるため、本章ではその差分解法について比較的詳しく解説することになります。本章を読めば各種の数値解法のほか、なぜ差分格子の格子幅の選び方に制限がつくのか、制限をなくすにはどのようにすればよいかなどについて理解できます。

## 1.1 線形偏微分方程式の差分解法 1

本節と次節では応用上よく現れる 1 階および 2 階の線形偏微分方程式の差分解法に対して、「流体シミュレーションの基礎」で述べなかったことを中心に簡単にまとめておきます。なお、本質部分は変わらないため、主に 2 つの独立変数に対する線形偏微分方程式について話をすすめます。

**1 階線形偏微分方程式**は、2 独立変数 ( $x$  と  $t$  とします) の場合、

$$D(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + E(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + F(x, t)u = G(x, t) \quad (1.1)$$

という形をしています。たとえば、1 次元移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

は式 (1.1) で、 $D = 1$ 、 $E = c$ 、 $F = G = 0$  とおいたものです。

次に **2 階線形偏微分方程式**は、2 独立変数 ( $x$  と  $t$  とします) の場合、

$$\begin{aligned} & A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & + D(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + E(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + F(x, t)u = G(x, t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

という形をしています．具体例としては，**1次元波動方程式**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

( $A = 1, C = -c^2, B = D = E = F = G = 0$ ), **1次元拡散方程式 (1次元熱伝導方程式)**

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

( $C = a^2, D = -1, A = B = E = F = G = 0$ ), **2次元ポアソン方程式** (ふつうは  $t$  のかわりに  $y$  と記します)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G(x, t) \quad (1.6)$$

( $A = C = 1, B = D = E = F = 0$ ) があります．式 (1.3) は，係数の関数  $A, B, C$  から  $B^2 - 4AC$  をつくったとき，

$$B^2 - 4AC > 0 \text{ ならば双曲型}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \text{ ならば放物型}$$

$$B^2 - 4AC < 0 \text{ ならば楕円型}$$

といいます．したがって，1次元波動方程式は**双曲型**，1次元拡散方程式は**放物型**，2次元ポアソン方程式は**楕円型**です．数値解法という面からは，1階線形微分方程式および2階線形微分方程式の中で双曲型と放物型はある程度類似していますが，それらと楕円型とは異なっています．そこで，後者については節を変えて議論します．また本質は変わらないので，線形偏微分方程式の差分解法に対する具体例として，1次元移流方程式，1次元拡散方程式，2次元拡散方程式，2次元ポアソン方程式をとりあげることになります．

### (1) 1次元移流方程式

本項では1次元移流方程式の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (c > 0, \quad -\infty < x < \infty) \quad (1.7)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.8)$$

を取り上げます．この初期値問題は差分法を用いるまでもなく，厳密解

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.9)$$

をもつことはもとの問題に代入することにより確かめられますが，差分法による解法を示すために例として用います．式 (1.9) は図 1.1 に示すように，初期形状として  $u(x, 0) = f(x)$  をもった波が形を変えずに速さ  $c$  で  $x$  の正方向に伝わっていくという解になっています．ここでは，図のように領域の一部分に局在化した波を初期条件にとることにします．

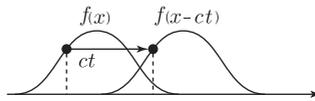


図 1.1 1次元移流方程式の解

差分法では解くべき領域を**差分格子**に分割して，微分を差分で置き換えて解きます．今の例では領域は無限ですが，無限区間では計算できないため，有限区間でおきかえます．前述のとおり，厳密解は速さ  $c$  で伝わる波を表すため，この波が境界に到達するまでの間は境界における条件を課さずに（具体的には境界で  $u = 0$  とします）解くことができます．

式 (1.7) を時間方向に前進差分，空間方向に後退差分を用いて近似すれば

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (1.10)$$

となります．ここで，空間に後退差分を用いたのは波が左から右に伝わるという解の性質を考えたためです．すなわち，解は前方の影響を受けません．式 (1.10) は

$$u_j^{n+1} = (1 - r)u_j^n + ru_{j-1}^n, \quad r = c\Delta t/\Delta x \quad (1.11)$$

と書き換えられます．この差分方程式の構造を図 1.2 に示します．

差分法で解を求めるということは，図 1.3 に示すような領域内の各格子点における  $u_j^n$  の値を求めるということであり，初期条件が与えられているということは，この長方形領域の下の辺での  $u_j^0$  の値が既知ということです．そこで，図に示すように， $u_j^0$  の値から式 (1.11) (図 1.2) を用いて  $u_j^1$  の値が

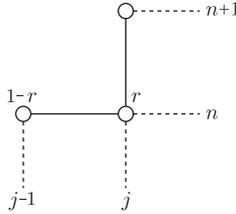


図 1.2 式 (1.11) の構造

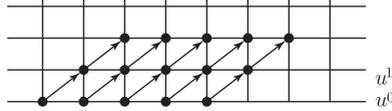


図 1.3 式 (1.11) による解の求まり方

$j = 1, 2, 3, \dots$  の順に求まり, 同様に  $u_j^2, u_j^3$  の値が計算できます. なお, 境界 (左右の辺) の値は 0 のままですが, これは初期の値が境界に到達するまでは成り立ちます.

■安定解析 差分方程式 (1.11) の特解として,

$$u_j^n = G^n e^{i\xi j \Delta x} \quad (1.12)$$

を仮定して,  $G$  を求めてみます. ただし,  $G^n$  は  $G$  の  $n$  乗を意味します. これは, もとの偏微分方程式の特解を求める場合に, フーリエ成分の形  $u(x, t) = g(t)e^{i\xi x}$  を仮定することからの類推になっています.

$$u_j^{n+1} = GG^n e^{i\xi j \Delta x} = Gu_j^n, \quad u_{j-1}^n = G^n e^{i\xi j \Delta x} e^{-i\xi \Delta x} = u_j^n e^{-i\xi \Delta x}$$

に注意すれば, 式 (1.11) は

$$Gu_j^n = (1-r)u_j^n + re^{-i\xi \Delta x} u_j^n$$

となるため

$$G = 1 - r + re^{-i\xi \Delta x} = 1 - r + r(\cos \xi \Delta x - i \sin \xi \Delta x) \quad (1.13)$$

となります。したがって、これを式 (1.12) に代入したものが式 (1.11) の特解です。

ここで、式 (1.12) から

$$|u_j^n| = |G^n e^{i\xi j \Delta x}| = |G|^n$$

であるため、 $n$  の増加とともに  $|u_j^n|$  が限りなく大きくならないためには、

$$|G| \leq 1 \tag{1.14}$$

である必要があります。これを **フォン・ノイマンの条件** といいます。式 (1.13) にこの条件（したがって  $|G|^2 - 1 \leq 0$ ）をあてはめれば（ $\theta = \xi \Delta x$  とおいて）

$$\begin{aligned} |G|^2 - 1 &= (1 - r + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta - 1 = (1 - r)^2 + 2r(1 - r) \cos \theta + r^2 - 1 \\ &= 2r(1 - r)(\cos \theta - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

となりますが、 $\cos \theta \leq 1$  および  $r = c\Delta t / \Delta x > 0$  を考慮して、 $1 - r \geq 0$  が得られます。すなわち、式 (1.11) によって意味のある解を得るためには  $r \leq 1$  である必要があります。

物理的な考察から式 (1.7) の空間微分を後退差分で近似しましたが、もし前進差分で近似すればどうなるかを試してみます。このとき、近似式は

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0$$

すなわち

$$u_j^{n+1} = (1 + r)u_j^n - ru_{j+1}^n \quad (r = c\Delta t / \Delta x)$$

となります。そこで、特解として式 (1.12) を仮定して上式に代入して  $G$  を求めれば

$$G = 1 + r - re^{i\xi \Delta x} = 1 + r - r \cos \theta - ir \sin \theta$$

となります。ここで  $\theta$  が 0 であるときを除き

$$|G|^2 = (1 + r - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = 1 + 2r(1 + r)(1 - \cos \theta) > 1$$

であることに注意すれば、この近似式を用いた場合、解の絶対値は時間とともに増大します。すなわち、空間微分を前進差分で近似する方法は使えないことがわかります。