Chapter 1

常微分方程式の数値解法

本書の目的は簡単な流れに対して数値シミュレーションの方法を示すことにあります．そのためには流体運動の基礎方程式であるナビエ・ストークス方程式を数値的に解く必要があります．ナビエ・ストークス方程式は非線形の連立偏微分方程式ですが，説明の順序としては，すべての基礎になる常微分方程式の数値解法から始めるのが適当です．微分方程式の数値解法というととても難しいように思えますが，実際はその逆で基本的な発想は単純で明解です．本章では偏微分方程式の理解に必要な最低限のことに絞って，常微分方程式の数値解法についてわかりやすく解説します．

1.1　初期値問題—1

はじめに **1 階微分方程式**

$$\frac{dx}{dt} = x \tag{1.1}$$

を初期条件

$$x(0) = 1 \tag{1.2}$$

のもとで数値的に解くことを考えてみます（**初期値問題**）．コンピュータでは微分することができないため，微分方程式の左辺を，h が十分に小さいとして

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x\,(t+h) - x\,(t)}{h} \sim \frac{x\,(t+h) - x\,(t)}{h} \tag{1.3}$$

のように近似します（**前進差分**といいます）．このとき，もとの微分方程式は

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x(t) \tag{1.4}$$

すなわち

$$x(t+h) = x(t) + hx(t) = (1+h)x(t) \tag{1.5}$$

と近似されます．この式は t を時間としたとき，時間 t での x の値から微小な時間 h 後の x の値を求める式とみなすことができます．一方，時間 0 での x の値は**初期値条件** (1.2) で与えられているため，この式を繰り返し用いることによって，解の近似値が h 間隔で求まります．実際，式 (1.5) で $t = 0$ とおけば

$$x(h) = (1 + h)x(0) = 1 + h \tag{1.6}$$

となり，次に式 (1.5) で $t = h$ とおいて，式 (1.6) を用いれば

$$x(2h) = (1 + h)x(h) = (1 + h)(1 + h) = (1 + h)^2 \tag{1.7}$$

となります．以下，同様に式 (1.5) で順に $t = 2h$，$t = 3h$ などと置いていけば

$$\begin{aligned} x(3h) &= (1 + h)x(2h) = (1 + h)(1 + h)^2 = (1 + h)^3 \\ x(4h) &= (1 + h)x(3h) = (1 + h)(1 + h)^3 = (1 + h)^4 \\ &\cdots \end{aligned} \tag{1.8}$$

となります．この式から一般に

$$x(nh) = (1 + h)^n \tag{1.9}$$

という近似解が得られます．このように 1 階微分方程式の微分を前進差分で置き換えて解く方法を**オイラー法**とよんでいます．

いま，$nh = T$ とおけば，オイラー法で求めたもとの方程式の解は

$$x(T) = \left(1 + \frac{T}{n}\right)^n \tag{1.10}$$

と書けます．一方，初期条件を満たす厳密解は

$$x(T) = e^T \tag{1.11}$$

です．ここで式 (1.10) の時間間隔 h を限りなく小さくすれば，$n \to \infty$ となりますが，式 (1.10) はこの極限において式（1.11）に一致します（指数関数の定義式）．

オイラー法は次の形をした任意の 1 階微分方程式の初期値問題に適用できます：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(0) &= a \end{aligned} \tag{1.12}$$

ここで，f は t と x に関して形が与えられた関数とします．式 (1.12) の微分を前進差分で置き換えると

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(t, x(t)) \tag{1.13}$$

すなわち，

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)) \tag{1.14}$$

となります．この式も時間 t での値から，時間 $t+h$ の値を求める式とみなせます．特にこの式で $t = nh$ とおけば

$$x((n+1)h) = x(nh) + hf(nh, x(nh)) \tag{1.15}$$

となります．いま，記法を簡単にするため，$nh = t_n$ および

$$x(0) = x_0, x(h) = x_1, \cdots, x(nh) = x_n, \cdots \tag{1.16}$$

とおけば式 (1.15) は

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n) \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned} \tag{1.17}$$

となります．x_n が与えられれば $f(t_n, x_n)$ は計算できる量であるため，式 (1.17) は**漸化式**になっています．そこで，$x_0 = a$ からはじめて，式 (1.17) の n を $0, 1, 2, \cdots$ と順に増加させていくことにより，方程式 (1.12) の解が h 刻みに求まります（図 1.1）．

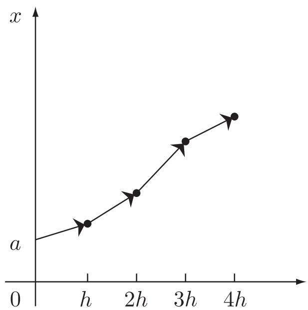

図 1.1　オイラー法

Example 1　リッカチ方程式 ....

$$\frac{dx}{dt} = (t^2 + t + 1) - (2t + 1)x + x^2 \tag{1.18}$$

を初期条件 $x(0) = 0.5$ のもとで解いてみます．この方程式はリッカチの方程式とよばれるもののひとつです．式 (1.18) は厳密解

$$x = \frac{te^t + t + 1}{e^t + 1} \tag{1.19}$$

をもちます.

[Answer]

表 1.1　オイラー法

l の値	近似解	厳密解
0.000000	0.50000000	0.50000000
0.100000	0.57499999	0.57502085
0.200000	0.65006250	0.65016598
0.300000	0.72531188	0.72555745
0.400000	0.80086970	0.80131233
0.500000	0.87685239	0.87754065
0.600000	0.95336890	0.95434374
0.700000	1.03051901	1.03181231
0.800000	1.10839140	1.11002553
0.900000	1.18706274	1.18905067
1.000000	1.26659691	1.26894152
1.100000	1.34704459	1.34974003
1.200000	1.42844319	1.43147540
1.300000	1.51081753	1.51416516
1.400000	1.59418023	1.59781611
1.500000	1.67853284	1.68242574
1.600000	1.76386690	1.76798177
1.700000	1.85016549	1.85446537
1.800000	1.93740392	1.94185138
1.900000	2.02555156	2.03010869
2.000000	2.11457276	2.11920333

この方程式をオイラー法で近似すれば

$$x_{n+1} = x_n + h((t_n^2 + t_n + 1) - (2t_n + 1)x_n + x_n^2) \tag{1.20}$$

となります．ここで $h = 0.1$ とすれば

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + h((t_0^2 + t_0 + 1) - (2t_0 + 1)x_0 + x_0^2) \\
&= 0.5 + 0.1 \times ((0^2 + 0 + 1) - (2 \times 0 + 1) \times 0.5 + 0.25) \\
&= 0.575 \\
x_2 &= x_1 + h((t_1^2 + t_1 + 1) - (2t_1 + 1)x_1 + x_1^2) \\
&= 0.575 + 0.1 \times ((0.01 + 0.1 + 1) - (2 \times 0.1 + 1) \times 0.575 + (0.575)^2)) \\
&= 0.65006
\end{aligned} \tag{1.21}$$

というように順に解が求まります．計算結果と厳密解との比較を表 1.1 に示します.

. . . .

次に **2 階微分方程式**の初期値問題を考えてみます．例として

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -x \\
x(0) &= 0 \\
\frac{dx}{dt}(0) &= 1
\end{aligned} \tag{1.22}$$

を取り上げます．いま，$y = dx/dt$ とおけば，$dy/dt = d^2x/dt^2$ となるため，もとの方程式は**連立 2 元 1 階微分方程式**

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y \\
\frac{dy}{dt} &= -x
\end{aligned} \tag{1.23}$$

を，初期条件

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \tag{1.24}$$

のもとで解くことに帰着されます．そこで，各方程式にオイラー法を適用すれば,

$$\begin{aligned}
\frac{x(t+h) - x(t)}{h} &= y(t) \\
\frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= -x(t)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

より

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hy(t) \\ y(t+h) &= y(t) - hx(t) \end{aligned} \tag{1.26}$$

となります．これらの式は，時間 t から時間 $t+h$ の値を求める式とみなせます．すなわち，初期条件から $x(0)$ と $y(0)$ の値は既知であるため，まず式 (1.26) に $t=0$ を代入して右辺を計算すれば，$x(h)$ と $y(h)$ が求まります．次に式 (1.26) に $t=h$ を代入すれば，上で計算した $x(h)$ と $y(h)$ を用いて右辺を計算して，$x(2h)$ と $y(2h)$ が求まります．以下，同様にすれば $x(2h)$ と $y(2h)$ から $x(3h)$ と $y(3h)$ が，$x(3h)$ と $y(3h)$ から $x(4h)$ と $y(4h)$ というようにして，h きざみに x と y が同時に計算できます．

Example 2　**連立微分方程式** ....

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3x - 2y + 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y - \sin t \end{aligned} \tag{1.27}$$

を初期条件

$$x(0) = 4.5, \quad y(0) = -6.5 \tag{1.28}$$

のもとで解いてみます．

[Answer]

これらの式は，$x_n = x(t_n)$，$y_n = y(t_n)$ とおけば

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(-3x_n - 2y_n + 2t_n) \\ y_{n+1} &= y_n + h(2x_n + y_n - \sin t_n) \end{aligned} \tag{1.29}$$

と近似されます．そこで $h = 0.1$ とすれば

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.5 + 0.1 \times (-3 \times 4.5 - 2 \times (-6.5) + 2 \times 0) = 4.45 \\ y_1 &= -6.5 + 0.1 \times (2 \times 4.5 - 6.5 - \sin 0) = -6.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 4.45 + 0.1 \times (-3 \times 4.45 - 2 \times (-6.25) + 2 \times \sin(0.1)) = 0.4385 \\ y_2 &= -6.25 + 0.1 \times (2 \times 4.45 - 6.25 - \sin(0.1)) = -5.9950 \end{aligned} \tag{1.30}$$

というように順に解の近似値が求まります．表 1.2 にはこのようにして得られた数値解と厳密解

$$
\begin{aligned}
x &= \left(-\frac{1}{2}+t\right)e^{-t}+(-2t+6)-\cos t \\
y &= -te^{-t}+(4t-8)+\frac{3}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin t
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

との比較を示します.

表 1.2　連立微分方程式の解

l の値	x の近似解	x の厳密解	y の近似解	y の厳密解
0	4.5	4.5	-6.5	-6.5
0.1	4.45	4.443060868	-6.25	-6.247894202
0.2	4.385	4.374314196	-5.994983342	-5.992980949
0.3	4.308496668	4.296499867	-5.737348609	-5.737000836
0.4	4.22341739	4.211907001	-5.478936157	-5.481245699
0.5	4.132179404	4.122417438	-5.221088129	-5.226604256
0.6	4.036743209	4.029545549	-4.964703615	-4.973604796
0.7	3.938660969	3.934474873	-4.710289582	-4.722455275
0.8	3.839120595	3.83809198	-4.458008115	-4.473081153
0.9	3.738986039	3.741017896	-4.207720417	-4.225161196
1	3.638834311	3.643637415	-3.959027941	-3.978161475
1.1	3.538989606	3.546126529	-3.711310972	-3.73136769
1.2	3.439554918	3.448478194	-3.463764884	-3.483915966
1.3	3.34044142	3.350526606	-3.215434297	-3.234822181
1.4	3.241395853	3.251970125	-2.965245261	-2.9830099
1.5	3.14202615	3.152392958	-2.71203559	-2.727336931
1.6	3.041825423	3.051285692	-2.454583418	-2.466620514
1.7	2.940194479	2.948064723	-2.191634035	-2.199661138
1.8	2.836462943	2.842090649	-1.921925024	-1.925264956
1.9	2.729909065	2.732685634	-1.644209701	-1.642264771
2	2.619778285	2.619149761	-1.357278867	-1.349539535

この手順は一般の連立 2 元の 1 階微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t,x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= g(t,x,y)\\ x(0)=a, &\quad y(0)=b\end{aligned} \tag{1.32}$$

に対しても全く同様にあてはめられます．なぜなら，各微分係数を前進差分でおきかえて変形すれば

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x(t)+hf(t,x(t),y(t))\\ y(t+h) &= y(t)+hg(t,x(t),y(t))\end{aligned} \tag{1.33}$$

となるため，t における関数値を用いて $t+h$ の関数値がただちに計算できるからです．この式を漸化式の形に書き表すとさらにわかりやすくなります．すなわち，$x(nh)=x_n$，$y(nh)=y_n$，$nh=t_n$ とおくことによって

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n+hf(t_n,x_n,y_n)\\ y_{n+1} &= y_n+hg(t_n,x_n,y_n)\\ t_{n+1} &= t_n+h\end{aligned} \tag{1.34}$$

となります．ここで f，g は既知であるため，この式を用いて x_0,y_0 からはじめて順次

$$x_0,y_0 \to x_1,y_1 \to x_2,y_2 \to \cdots \tag{1.35}$$

の順に計算できます．なお，同じ方法（オイラー法）は連立 1 階微分方程式の元数によらずに適用できます．

このようにして連立 1 階微分方程式が解ければ，**高階微分方程式**の初期値問題も変数の置き換えを行って解くことができます．たとえば，3 階微分方程式

$$\frac{d^3x}{dt^3} = f\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right) \tag{1.36}$$

の初期条件

$$x(0)=a, \quad \frac{dx}{dt}(0)=b, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(0)=c \tag{1.37}$$

のもとでの解を求めるには，

$$y=\frac{dx}{dt}, \quad z=\frac{dy}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1.38}$$