Chapter 1

流れ学の基礎

本章では流体力学への導入として，容易に理解できる内容を中心に流体力学の基礎事項について簡単に述べることにします．

1.1　流体の静力学

物質はふつう固体，液体，気体のいずれかの状態をとります．このうち，液体と気体は外部から加えられた力によって容易に変形します．また，それ自体は決まった形をもたずにどのような形状の容器も満たすことができます．このように，液体と気体は力学的な性質が似ており，類似の枠組みで理解できることが多いため，物理学や工学の分野ではまとめて**流体**とよんでいます．

はじめに固体を用いて**応力**という概念を導入することにします．図 1.1 に示すように静止した固体の棒の両端を大きさが同じで逆向きの力 F で引っ張ったとします．このとき棒は静止状態を保ちますが，棒をひとつの断面で 2 つに分けて考えると，この断面はやはり F で両側に引っ張られています．なぜなら，もしそうでなければ 2 つの部分は動き出すからです．一般に固体内に任意の微小面 dS を考えると，この面には同じ大きさで逆向きの力が働いています．この力を単位面積あたりの力に換算して，応力とよびます．応力は図 1.1 の破線の面を見ても明らかなように，必ずしも考えている面に垂直に働くとは限りません．そこで応力を，考えている面に垂直方向と水平方向とに分け，それぞれ**法線応力**と**接線応力**とよぶことにします（図 1.2）．また法線応力のうち，面を押す力を**圧力**，引っ張る力を**張力**とよんで区別します．応力を用いると，

> 流体とは静止状態において圧力のみが働く物質である

というようにも定義できます．なぜなら, 流体は自由に変形するため，もし接線応力があれば，流体はその方向にずれ動き静止状態ではいられず，張力があれ

ば流体は引きちぎられて真空部分をつくることになりますが，実際はそうなっていないからです．また圧力は考えている面の方向によらずに常に一定です．このことは以下のようにして示せます．

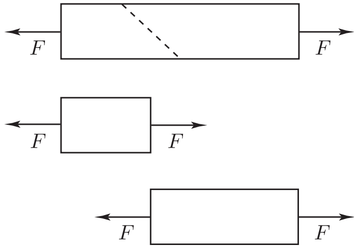

図 1.1　応力

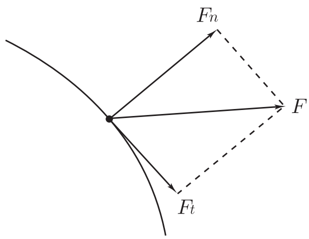

図 1.2　法線応力 F_n と接線応力 F_t

流体内から図 1.3 に示すように底角 θ の二等辺三角形形状をした微小なプリズム形状の領域（奥行きを d とする）を取り出したとき底辺に平行な方向の力の釣り合いを考えると，図から

$$(p_1 \sin\theta)ld = (p_2 \sin\theta)ld$$

が成り立ちます[*1]．すなわち，

$$p_1 = p_2$$

[*1] 流体にはここで考えた表面を通して働く圧力のほか，重力など体積を通して働く力もありますが，前者は考えている部分の長さの 2 乗，後者は 3 乗に比例するため，十分に小さい部分では後者は前者に比べて無視できます．

となります．ところが，二等辺三角形は任意にとれるため，結局圧力 p は一定になります．

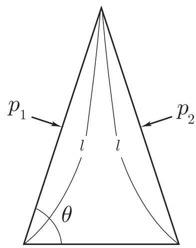

図 1.3　圧力の釣り合い

図 1.4 に示すように，静止している流体の水平面に沿って，幅の狭い直方体を考え，x 方向の力の釣り合いを考えると

$$p_A S = p_B S$$

が成り立ちます．ただし，S は考えている面の面積です．これから

$$p_A = p_B \tag{1.1}$$

となるため，水平面内ではどこでも圧力は等しいことがわかります．

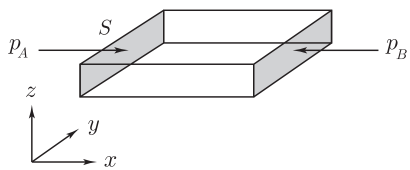

図 1.4　水平方向の力の釣り合い

次に鉛直方向の圧力分布を調べるため，図 1.5 に示すように流体内に高さ δz の直方体を考えて，z 方向の力の釣り合いを調べます．流体の密度を ρ とすれば，直方体に働く重力は $\rho(S\delta z)g$ であるため

$$p_D S = p_C S + \rho(S\delta z)g$$

となり，これから

$$p_D = p_C + \rho g \delta z \tag{1.2}$$

が成り立ちます．いま上面から下面の圧力を引いた $p_C - p_D$ を δp と書けば，上式は $\delta p = -\rho g \delta z$ となります．この式は $\delta z \to 0$ の極限で微分方程式

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{1.3}$$

になります．

密度が一定の場合，式 (1.3) を区間 $[0, z]$ で積分すれば

$$p = p_0 - \rho g z \tag{1.4}$$

となります．ただし，p_0 は $z = 0$ における圧力です．もし，空気の密度が高さによらなければ，上式に $p_0 = 101325 \text{ Pa} = 101325 \text{ N/m}^2$，$g = 9.806 \text{ m/s}^2$，$\rho = 12930 \text{ kg/m}^3$ を代入して $p = 0$ となる高さを求めると，$z = 7991 \text{ m}$ となります．

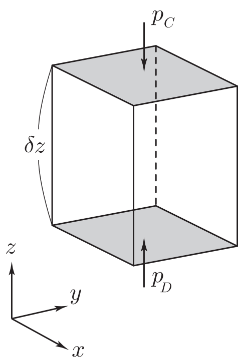

図 1.5　鉛直方向の力の釣り合い

次に，温度一定の理想気体では，**ボイルの法則**から圧力と密度は比例するため，c を比例定数として

$$\rho = cp \tag{1.5}$$

が成り立ちます．このとき，式 (1.3) は

$$\frac{dp}{dz} = -cgp$$

となり，これを積分して，

$$p = Ae^{-cgz}$$

が得られます（A は任意定数）．ここで $z = 0$ のとき $p = p_0$，$\rho = \rho_0$ とすれば，式 (1.5) から $c = \rho_0/p_0$ となるため上式は

$$p = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gz} \tag{1.6}$$

とも書けます．この式から気体の圧力は温度が一定の場合，高さとともに指数関数的に減少することがわかります．

1.2　流線と流管

以下，運動している流体を考えます．流体の運動状態を指定するもっとも基本的な量に流れの速度（流速）があります．速度は大きさと方向をもったベクトル量であるため，矢印を使って表すことができます．そこで，図 1.6 に示すように流れの領域中のいろいろな場所に，流速に対応する矢印を書けば，流れの様子がわかります．

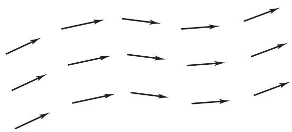

図 1.6　速度場

流体の微小部分に注目してそこで流速に比例した長さをもつ短い矢印を書き，その終点部分の流体の速度でさらに矢印を書くといったことを続ければ，一つの折れ線ができます．各矢印をどんどん短くすれば，図 1.7 に示すような一つの曲線が得られますが，この曲線のことを**流線**とよんでいます．あるいは，流線とは，その曲線上の各点で接線を引いたとき，接線の方向がその場所の流速ベクトルの方向を表すような曲線であるともいえます．

流線の重要な性質として，流速が 0 である点を除いて流線は交わらないことがあげられます．なぜなら，もし交わったとすれば，その点で流速が 2 種類定義されて不合理だからです．さらに定義から，流線を横切って流体は流れないこともわかります．

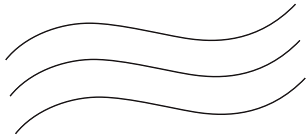

図 1.7　流線

次に図 1.8 に示すように流体内にひとつの閉曲線 C を考え，その境界上の各点をとおる流線を考えます．このとき，流体内には流線で囲まれた管ができますが，この管のことを**流管**とよんでいます．流管も流線と同様に，それを横切って流体は流れないため，固体でできた管とみなせます．ただし，流れが時間的に変化する場合は，この管の形も時間的に変化します．

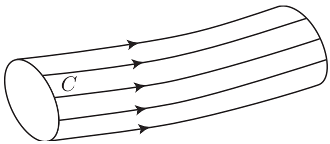

図 1.8　流管

1.3　流管内での流体の運動

本節では流体内に 1 つの流管を考え，その中を流れる粘性が無視できる流体の定常運動を考えます．ここで定常とは時間的に変化しないことを指します．流管の性質から流体は流管をとおり抜けないため，前述のように流管を管壁とするようなパイプ内の流れと考えることができます．このような流れを考える上で，質量保存則，運動量の法則およびエネルギー保存則が基本になります．

(1) 質量保存則

図 1.9 に示すように時刻 t に流管の AB 部分を占めていた流体が δt 後の時刻 $t + \delta t$ に $\mathrm{A'B'}$ に移ったとします．流管内では流体が発生したり消滅したりしないため，AB 部分の流体と $\mathrm{A'B'}$ 部分の流体の質量は同じになります．

一方，定常な流れでは流管の形は変化しないため A′B 部分は共通になり，結局 AA′ 部分と BB′ 部分の流体の質量は等しくなります．いま，A の位置での流管の断面積を S_A，流体の（流管に沿った）速度を u_A，密度を ρ_A とし，B におけるそれらをそれぞれ S_B，u_B，ρ_B とすれば，AA′ 部分の流体の質量は（密度）×（体積）＝（密度）×（底面積）×（高さ）なので $\rho_A S_A u_A \delta t$ であり，BB′ 部分の流体の質量は $\rho_B S_B u_B \delta t$ となります．したがって，これらを等値すれば

$$\rho_A u_A S_A = \rho_B u_B S_B$$

という式が得られます．この関係は A，B がどこにあってもよいため，流管内で

$$\rho u S = 一定 \tag{1.7}$$

が成り立ちます．式 (1.7) が流管内の**質量保存則**を表す式です．密度が一定とみなせる流体を考えれば，式 (1.7) は速度と断面積が反比例することを表しています．したがって，流管やパイプが太くなっている場所では流速は遅いことがわかります．

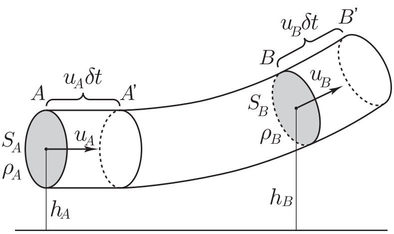

図 1.9　流管内の物理量の保存

（2）運動量の法則

流体の小さな部分を考え，ニュートンの**運動の第 2 法則**を適用してみます．この法則は，（質量）×（加速度）＝（力）であるため，微小部分の質量 m が一定の場合には

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

となります．また質量 m が変化する場合には

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \tag{1.8}$$

あるいは

$$\delta(mv) = F\delta t \tag{1.9}$$

となります．この式は運動量の変化が外から加えられた力積に等しいことを示しており，**運動量の法則**ともよばれます．

図 1.9 に示した流管内を流れる流体について運動量の法則を適用することを考えてみます．質量保存の場合と同様に考えれば，時間 δt 間における運動量の変化は流管 A′B′ 内の流体のもつ運動量から流管 AB 内の流体がもつ運動量を差し引いたものであり，それは共通部分を除けば流管 BB′ 内の流体のもつ運動量から流管 AA′ 内の流体がもつ運動量を差し引いたものに等しくなります．これらはそれぞれ $(\rho_B S_B u_B \delta t)u_B$ と $(\rho_A S_A u_A \delta t)u_A$ であるため，流管 AB に働く外力の総和を F とすれば，運動量の法則は

$$\rho_B u_B \delta t S_B u_B - \rho_A u_A \delta t S_A u_A = F\delta t$$

と書けます．ここで外力としては，A に働く圧力と B に働く圧力などがあります[*2]．

単位時間に A，B に流入する体積（流量）を Q_A，Q_B とすれば，これらはそれぞれ $u_A S_A$，$u_B S_B$ であるため，運動量の法則は

$$\rho_B Q_B u_B - \rho_A Q_A u_A = F \tag{1.10}$$

と書けます．なお，流体の密度が一定とみなせる場合には，式 (1.7) から

$$\rho_B Q_B = \rho_A Q_A = \rho Q\ (= 一定)$$

となるため，式 (1.10) は

$$\rho Q(u_B - u_A) = F \tag{1.11}$$

と簡単化されます．

[*2] 粘性が無視できない場合には，粘性による内部摩擦を考える必要があります．