

第 3 章

簡単な流れのシミュレーション

3.1 キャビティ流れ

前章では偏微分方程式を差分法で解くということがどのようなことを示す目的でラプラス方程式 (ポアソン方程式), 1 次元 (2 次元) 拡散方程式および移流拡散方程式を例にとって解説した. 本章では簡単な流れの数値シミュレーション法を解説するが, その場合にポアソン方程式および移流拡散方程式の解法が基本になる. 本章ではじめに考える問題は 2 次元正方形キャビティ内の流れで, 以下のような問題である.

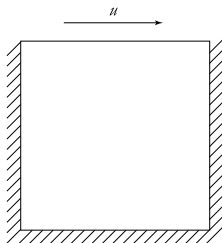


図 3.1 正方形キャビティ

図 3.1 に示すような正方形形状の領域を考え、その中に流体が満たされているとする。この正方形の 3 つの辺は固定された壁であり、残りの 1 辺（上壁）は動くことのできる壁であるとする。いま、上壁を一定速度で右に動かしたとすると、壁近くの流体（水や空気）はそれに引きずられて動き出す。この流体は右壁に向かって進むが、壁を通り抜けることが出来ないため、下方向に曲げられる。さらにこの曲げられた流体は下に壁があるためもう一度進行方向右側（図の左側）に曲げられ、上の壁の動きと逆向きの流れが生じる。一方、上壁の左側では流体が動き出すためその不足分を補うように下から流体が流れ込む。この流れは左下方に流体の不足を生み出すため、右から流れ込むことになるが、この流れも壁と逆方向を向いている。したがって、最終的には図 3.2 に示すような循環する流れが、正方形内にできると考えられる。キャビティ問題とはこのような流れ（キャビティ流れ）を求める問題である。現実の状況にあてはめてみれば、キャビティ流れは、図 3.3 (a) に示すように、直線状の川に川岸に沿って正方形形状のくぼみがある場合のくぼみ内の流れ、あるいは図 3.3 (b) に示すように流路の底に、流れ方向に垂直に溝があった場合の溝の中の流れとして近似的に実現されると考えられる。

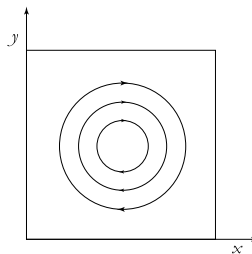


図 3.2 正方形キャビティ内の流れ（概念図）

われわれが日常に目にする流れの流速は、音速に比べて十分に小さいのが普通である。このような流れは非圧縮性ナビエ・ストークス方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (3.1)$$

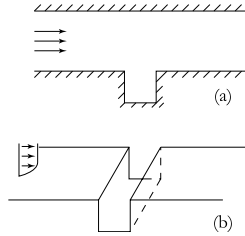


図 3.3 正方形キャビティ内流れが実現される例

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (3.2)$$

に支配される．ここで、 \mathbf{v} は流速ベクトル、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性率（一定と仮定）、 \mathbf{F} は単位質量あたりの外力である．式 (3.1) は流体の質量の保存を表し連続の式ともよばれ、また式 (3.2) は流体の運動量の保存を表し、運動方程式ともよばれる．以下では密度が一定で外力もない場合を考える．さらに流れは 2 次元であるとする．2 次元という意味は、キャビティ流れでは、図 3.2 において紙面に垂直方向には流れが変化しないと仮定することを意味する．たとえば、図 3.3 (b) の場合には、溝の軸に垂直な断面内の流れを考える限り、どの断面でも同じ現象が起こっているものと考えられるため 2 次元流れになる．このとき、式 (3.1)、(3.2) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

となる．ここで u, v は速度の x, y 成分、 φ は p/ρ 、 ν は μ/ρ (動粘性率ともよばれる) である．式 (3.3)、(3.4)、(3.5) の未知数は u, v, φ の 3 つで、方

程式の数と一致している．そこで，これらの方程式を適当な初期条件・境界条件のもとで解けば流れが決まることになる．

2次元のキャビティ問題を具体的に解くために，正方形の一边を 1 m とし，上の壁を毎秒 1 m の速さで動かすとしよう．座標系としては，図 3.2 に示すようにとる．このとき境界条件は，

$$\begin{aligned} u(x, 0) = v(x, 0) = u(0, y) = v(0, y) = u(1, y) = v(1, y) = 0 \\ u(x, 1) = 1, \quad v(x, 1) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる．

3.2 流れ関数 - 渦度法

非圧縮性の 2 次元流れを支配する方程式 (3.3), (3.4), (3.5) を差分法を用いて解く場合にしばしば使われる方法に流れ関数 - 渦度法とよばれる方法がある．この方法は 2 次元流れに適用が限られるが，連続の方程式 (3.3) が厳密に満たされるという点で他の方法にはない長所をもっている．

流れ関数 - 渦度法では次式で定義される流れ関数 ψ を導入する：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.7)$$

このとき，連続の式 (3.3) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

となるため，この流れ関数を用いることによって厳密に満足されることがわかる．いいかえれば，流れ関数を用いれば連続の式を考える必要がなくなる．また，以下に示すように流れ関数が一定の曲線（流れ関数の等値線）は流線と一致するという重要な性質がある．

< 流線について >

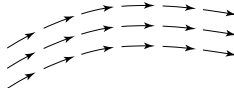


図 3.4 流線

流れている流体は、各部分で流速をもっている。流速（速度）はベクトル量であるから矢印で表示できる。そこで、流体の各部分に流速に応じて小さな矢印を書く。矢印を書く点が十分に密であれば図 3.4 に示すように矢印を連ねた線が描ける。この曲線を流線と呼んでいる。流れは流線に沿って流れるため、流線を横切ることはない。流線の上の微小な線素を表すベクトルを dr としたとき、定義から dr とその点での流速 v は平行である。このことを成分で書けば

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \text{ または } udy - vdx = 0$$

となる。この式に流れ関数の定義 (3.7) を代入すれば、流線上で

$$0 = udy - vdx = \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = d\psi$$

したがって、

$$\psi = \text{一定 (流線上)}$$

となる。

次に運動方程式から圧力を消去することを考える。そのために式 (3.5) を x で微分したのから、式 (3.4) を y で微分したものを引いてみる。その結果、

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + u \frac{\partial\omega}{\partial x} + v \frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right)$$

すなわち，

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (3.8)$$

が得られる．ただし，

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.9)$$

である．式 (3.9) は速度 v を 3 次元ベクトルと考えたとき， $\nabla \times v$ の z 成分になっている．物理的には流体の微小部分の回転に関する量であり，渦度とよばれる．また式 (3.8) は渦度輸送方程式とよばれる．式 (3.9) の速度成分を流れ関数を用いて表せば

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (3.10)$$

となる．式 (3.8) と (3.10) は未知関数 ψ, ω に関する閉じた方程式になっており，2 つの方程式を連立させて解くことができる．そこで，流れの基礎方程式に方程式 (3.8) と (3.10) を用いる方法を流れ関数 - 渦度法とよんでいる．

流れ関数 - 渦度法では流れ関数と渦度の初期条件と境界条件を与えることによって時間発展的に解を求めていくことができる．具体的には，まず領域内の渦度の初期条件と流れ関数の境界条件を与えれば，式 (3.10) のポアソン方程式を解くことによって領域内の流れ関数の値が定まる．ポアソン方程式の解き方はすでに前章で示した．得られた流れ関数を式 (3.8) に代入すれば，式 (3.8) は渦度だけが未知の渦度に関する移流拡散方程式になるため，やはり前章で示した方法で解くことができ，微小な時間 Δt 後の渦度が求まる．これは初期の渦度とは異なるため，式 (3.10) をもう一度解いて対応する流れ関数を求める．さらにこの流れ関数を用いて，次の時間での渦度を求める．以下同様にして

$$(3.8) \rightarrow (3.10) \rightarrow (3.8) \rightarrow (3.10) \rightarrow \dots$$

の順に解が時間間隔 Δt ごとに求まることになる．式 (3.8)，(3.10) を標準的な方法（時間に関して前進差分，空間に関して中心差分）を用いて差分化

すれば

$$\frac{\omega_{j,k}^{n+1} - \omega_{j,k}}{\Delta t} = \frac{1}{4\Delta x\Delta y} \left\{ (\psi_{j+1,k} - \psi_{j-1,k})(\omega_{j,k+1} - \omega_{j,k-1}) - (\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k-1})(\omega_{j+1,k} - \omega_{j-1,k}) \right\} + \nu \left\{ \frac{\omega_{j-1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j+1,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{j,k-1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k+1}}{(\Delta y)^2} \right\}$$

$$\frac{\psi_{j-1,k} - 2\psi_{j,k} + \psi_{j+1,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{j,k-1} - 2\psi_{j,k} + \psi_{j,k+1}}{(\Delta y)^2} = -\omega_{j,k}$$

となる．ただし時間に関する上添字 n は省略している．この方程式を図 3.5 に示すような格子で解くことになる．

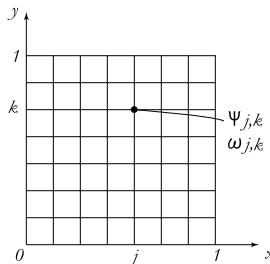


図 3.5 差分格子

流れの初期条件や境界条件は速度に関して与えられることが多い．そこで流れ関数 - 渦度法では速度の条件を流れ関数あるいは渦度の条件に翻訳して用いることになる．粘性をもつ流体は，壁面では流体と壁の間に相対速度は生じない（粘着条件）．そこでもし壁が静止していれば流体も静止しており，壁が動いていれば流体もそれと同じ速度で動く．キャビティ問題では底面および側面の壁は静止しており，上の壁は一定速度で x 方向に動いている．流れ関数の定義式にこの速度の条件を代入すれば，各面で流れ関数の値は一定値であることがわかる．この結果は流体が壁に入り込めないことに注意すれば計算しなくても直ちに導ける．なぜなら，流線は壁面と一致するからであ

る．4つの壁面で流れ関数の値は必ずしも等しくなくてもよいように見えるが，角の点で速度が無限に大きくなるためには，4つの壁で流れ関数の値は同じである必要がある．なお，流れ関数は微分方程式には導関数の形でしか現れないため，流れ関数の値には定数の不定性がある（ ψ と $\psi + c$ は同じ方程式を満たす）．そこで壁面で流れ関数の値を 0 としても一般性を失わない．以上の考察から，キャビティ問題における壁面上の流れ関数の境界条件は 0 となる．

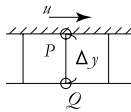


図 3.6 壁面での渦度の境界条件

渦度の境界条件は，流れ関数の境界条件と矛盾しないように決める必要がある．以下にその決め方を示す．差分法で方程式を解くため差分の形で考える．図 3.6 に示すように動いている壁からひとつ内側の格子点 Q に着目して，その格子点における流れ関数を壁面上の点 P の周りにテイラー展開する：

$$\psi_Q = \psi_P - \Delta y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + O((\Delta y)^3)$$

ここで，壁面上では

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 1, \quad \psi = 0$$

であるから， $(\Delta y)^3$ より高次の項を無視すれば

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2(\psi_Q + \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (3.11)$$

となる．さらに，壁面に沿って

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \text{したがって} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

が成り立つから，これらを式 (3.10) に代入すれば式 (3.11) の左辺は点 P での渦度 ω_P (の符号を逆にしたもの) であることがわかる．したがって，上の壁での渦度の境界条件は

$$\omega_P = -\frac{2(\psi_Q + \Delta y)}{(\Delta y)^2} \quad (3.12)$$

となる．同様に考え，下の壁では $u = 0$ であることを考慮すれば，境界条件は

$$\omega_P = -\frac{2\psi_Q}{(\Delta y)^2} \quad (3.13)$$

である．左右の壁も同じで，両方とも

$$\omega_P = -\frac{2\psi_Q}{(\Delta x)^2} \quad (3.14)$$

となる．ただし， ψ_Q は境界よりひとつ内側の格子点での値を示す．

渦度の初期条件は，初期に流体は静止しているから，速度が 0 の条件を渦度の定義式に代入して

$$\omega = 0 \quad (\text{全領域}) \quad (3.15)$$

となる．

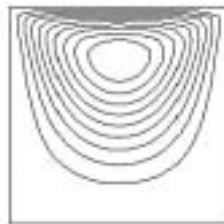


図 3.7 正方形キャビティ内流れの流線 ($\nu = 0.2$)

以下に格子が 21×21 のときの計算結果を示す．図 3.7 は $\nu = 0.2$ の場合で，十分に時間ステップが経過して流れが定常状態に達したと思われる時

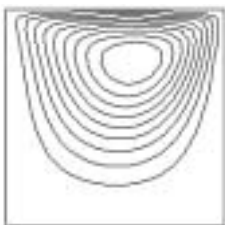


図 3.8 正方形キャビティ内流れの流線 ($\nu = 0.025$)

間での流線を示したものである．また，図 3.8 は $\nu = 0.02$ の場合の図 3.7 に対応する結果である．これらの図から，粘性率が小さくなるほど渦の中心が右上方に移動することがわかる．この問題に対するプログラムは付録 B.1 (P4) に示されている．

3.3 MAC法とフラクショナルステップ法

流れ関数 - 渦度法は連続の式を厳密に満足するという大きな長所があるが，圧力を消去しているため，境界条件として圧力に関する条件が課された場合には適用が難しい．さらに，流れ関数は 2 次元流れに対してのみ存在するため，3 次元流れを取り扱えないという大きな欠点もある．本節では，ナビエ・ストークス方程式をもとの変数（速度と圧力）について解く方法のなかで比較的簡便な方法である MAC 法とフラクショナルステップ法を紹介する．

はじめに MAC 法について説明する．式 (3.2)（外力は省略）の時間微分項を速度について前進差分（式 (2.13)）で近似すれば，

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n = -\nabla \varphi^{n+1} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n$$

すなわち，

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t (-(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \nabla \varphi^{n+1} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n) \quad (3.16)$$

となる。ただし、圧力は未知であることを強調するため上添字は $n+1$ にしている。この圧力を求めるために連続の式 (3.1) を利用する。すなわち、式 (3.16) の両辺の発散をとる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^{n+1} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}^n + \Delta t (-\nabla \cdot [(\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{v}^n] - \nabla^2 \varphi^{n+1} + \nu \nabla^2 [\nabla \cdot \boldsymbol{v}^n]) \quad (3.17)$$

このとき、左辺は 0 になる。一方、右辺の第 1 項と最終項も連続の式から 0 になるはずであるが、数値計算では常に誤差があること、さらに \boldsymbol{v}^n から $\nabla \cdot \boldsymbol{v}^n$ が計算できるという理由から、そのまま残しておく。このようにすることにより、現時点 (n ステップ) で誤差があったとしても次の時点 ($n+1$ ステップ) ではその誤差も考慮に入れて連続の式が満足されるようになる。いいかえれば、時間ステップが進行しても連続の式の誤差を小さくとどめておくことができる。式 (3.17) の左辺を 0 とした式を

$$\nabla^2 \varphi^{n+1} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}^n / \Delta t - \nabla \cdot [(\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{v}^n] + \nu \nabla^2 [\nabla \cdot \boldsymbol{v}^n] \quad (3.18)$$

と書き換えると、これは未知の圧力に関するポアソン方程式になっていることがわかる。右辺は現時点での速度から計算できるため、この方程式を解くことによって圧力が決定できる。なお、式 (3.18) の右辺において第 1 項と第 3 項を比較すると、通常 Δt は非常に小さいため、第 1 項が圧倒的に大きい。したがって、第 3 項を省略して

$$\nabla^2 \varphi^{n+1} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}^n / \Delta t - \nabla \cdot [(\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla) \boldsymbol{v}^n] \quad (3.19)$$

としてもほとんど式 (3.18) と差がない。

以上をまとめると MAC 法ではある時間ステップ n での速度を用いて式 (3.19) (または式 (3.18)) の右辺を計算して、このポアソン方程式を解いて圧力を決める。つぎにこの圧力と n ステップでの速度から、式 (3.16) を用いて次の時間ステップでの速度を求める。この手順を初期条件からはじめて時間発展的に繰り返して各時刻の速度、圧力を順次計算する。

次にフラクショナルステップ法を説明する．式 (3.2) から圧力項を取り除いた式を考える．MAC法と同様に，この式の時間微分項を前進差分で近似すれば

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n = \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n$$

すなわち，

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t(-(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{v}^n) \quad (3.20)$$

となる．ここで， \mathbf{v}^* は Δt 後の速度ベクトルに近いが，もとの運動方程式を解いて得られたものではないため，仮の速度という意味で星印をつけている．

圧力はこの仮の速度を用いて，次のポアソン方程式から決める：

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{v}^*}{\Delta t} \quad (3.21)$$

さらに，次の時間ステップでの速度 \mathbf{v}^{n+1} は圧力および仮の速度 \mathbf{v}^* から

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \Delta t \nabla \varphi \quad (3.22)$$

を用いて決める．式 (3.21)，(3.22) の意味は次のとおりである．式 (3.20) を式 (3.22) に代入すれば，運動方程式 (3.2) の時間微分を前進差分で近似した方程式に一致する（オイラー陽解法）．一方，式 (3.22) の両辺の発散をとれば，連続の式 (3.1) から $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$ となるため

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{v}^* - \Delta t \nabla^2 \varphi$$

となる．この式は式 (3.21) と同じものである．

以上をまとめるとフラクショナルステップ法ではある時間ステップでの速度を用いて式 (3.20) から仮の速度 \mathbf{v}^* を求め，次に式 (3.21) のポアソン方程式から圧力を計算する．そして，仮の速度と圧力から，式 (3.22) を用いて次の時間ステップでの速度を求める．この手順を初期条件からはじめて時間発展的に繰り返して各時刻の速度，圧力を順次計算する．

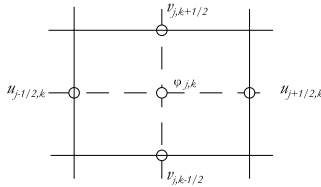


図 3.9 スタガード格子 (2次元)

それでは，前節で取り上げた 2 次元キャビティ問題を，フラクショナルステップ法で解いてみよう．流れ関数 - 渦度法では流れ関数と渦度は同じ格子点上で定義された．このような格子を通常格子という．フラクショナルステップ法では図 3.9 に示すように，各速度成分と圧力を半格子ずれた別の格子点で評価するスタガード格子を用いる．それは，方程式を差分近似した場合，質量の出入りを表す $\nabla \cdot v$ がひとつの格子で表されることや，圧力勾配の x 方向 (y 方向) 成分が x 方向 (y 方向) の速度を決めるという運動方程式の物理的な意味が自然に表現されるからである．

式 (3.20) を差分近似すれば

$$\begin{aligned}
 u_{j+1/2,k}^* &= u_{j+1/2,k}^n \\
 &+ \Delta t \left\{ -u_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+3/2,k}^n - u_{j-1/2,k}^n}{2\Delta x} - v_{j+1/2,k}^n \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - u_{j+1/2,k-1}^n}{2\Delta y} \right. \\
 &\left. + \nu \left(\frac{u_{j+3/2,k}^n - 2u_{j+1/2,k}^n + u_{j-1/2,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1/2,k+1}^n - 2u_{j+1/2,k}^n + u_{j+1/2,k-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 v_{j,k+1/2}^* &= v_{j,k+1/2}^n \\
 &+ \Delta t \left\{ -u_{j,k+1/2}^n \frac{v_{j+1,k+1/2}^n - v_{j-1,k+1/2}^n}{2\Delta x} - v_{j,k+1/2}^n \frac{v_{j,k+3/2}^n - v_{j,k-1/2}^n}{2\Delta y} \right. \\
 &\left. + \nu \left(\frac{v_{j+1,k+1/2}^n - 2v_{j,k+1/2}^n + v_{j-1,k+1/2}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{j,k+3/2}^n - 2v_{j,k+1/2}^n + v_{j,k-1/2}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

となる．ここで

$$v_{j+1/2,k}^n = \frac{1}{4}(v_{j,k-1/2}^n + v_{j,k+1/2}^n + v_{j+1,k-1/2}^n + v_{j+1,k+1/2}^n) \quad (3.25)$$

$$u_{j,k+1/2}^n = \frac{1}{4}(u_{j-1/2,k}^n + u_{j+1/2,k}^n + u_{j-1/2,k+1}^n + u_{j+1/2,k+1}^n) \quad (3.26)$$

である．この式を用いて領域内の格子点で仮の速度を求める．

次に圧力のポアソン方程式は

$$\frac{\varphi_{j+1,k}^n - 2\varphi_{j,k}^n + \varphi_{j-1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_{j,k+1}^n - 2\varphi_{j,k}^n + \varphi_{j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} = D_{j,k}$$

ただし

$$D_{j,k} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{j+1/2,k}^* - u_{j-1/2,k}^*}{\Delta x} + \frac{v_{j,k+1/2}^* - v_{j,k-1/2}^*}{\Delta y} \right) \quad (3.27)$$

と近似されるため，この式を $\varphi_{j,k}$ について解いて，反復式

$$\varphi_{j,k}' = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \times \left(\frac{\varphi_{j+1,k}^n + \varphi_{j-1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_{j,k+1}^n + \varphi_{j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} - D_{j,k} \right) \quad (3.28)$$

をつくる．ここで右辺の φ は反復前の圧力，左辺の φ' は 1 回反復後の圧力である．この反復を各格子点について行い，反復前後の φ と φ' が変化しなくなるまで繰り返す．

次の時間ステップでの速度は

$$u_{j+1/2,k}^{n+1} = u_{j+1/2,k}^* - \Delta t \frac{\varphi_{j+1,k}^n - \varphi_{j,k}^n}{\Delta x} \quad (3.29)$$

$$v_{j,k+1/2}^{n+1} = v_{j,k+1/2}^* - \Delta t \frac{\varphi_{j,k+1}^n - \varphi_{j,k}^n}{\Delta y} \quad (3.30)$$

から計算する．

境界条件は以下のようになる．スタガード格子を用いたために壁の位置をどこにとるかが問題になるが，ふつうは図 3.10 に示すように壁面と垂直方

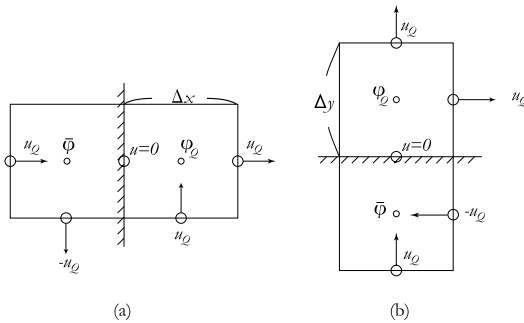


図 3.10 壁面での速度の境界条件

向の速度成分が壁面上にくるようにする．上に記した差分近似式で壁面近くの格子における物理量を計算する場合，計算には壁面の内部の格子点での値まで必要になる．このような場合には，壁面内部に仮想点を設けて境界条件を課すことになる．このとき，壁面に平行な速度成分は壁面をはさんで符号を逆にする．速度成分が直線的に変化しているとすれば，この条件は壁面上でちょうど速度が 0 になることを意味する．一方，壁面に垂直方向の速度は同じ大きさにとる．このようにとることで壁面をはさんだ両格子で連続の式が満たされる．圧力の境界条件は速度の境界条件を運動方程式に代入して決める．たとえば，図 3.10 (a) の場合には

$$\bar{\varphi} = \varphi_Q - \frac{2\nu u_Q}{\Delta x}$$

となる．

図 3.11 は $\nu = 0.2$ の場合で，十分に時間ステップが経過して流れが定常状態に達したと思われる時間での速度ベクトルと等圧線を示したものである．また，図 3.12 は $\nu = 0.025$ の場合の図 3.11 に対応する結果である．

なお，プログラムは付録 B.1 (P5) にある．