

## 第 1 章

# 部材に働く力と断面の性質

### 1.1 力と力の釣り合い

力や加速度はその大きさだけでは定まらない量であり、その方向も同時に指定しなければならない。つまり、どのくらいの大きさでどちらの方向に力を加えるかが明確でないと意味はない。

力の大きさと方向を持つ量をベクトル量という。これに対して方向を指定しなくても定まる量、例えば、体積や質量などをスカラー量という。

物体に力が働くと、その大きさ、作用する方向、位置によりその結果は違ってくる。

また、物体をある方向に回転させようとする力が存在する。このようにある点を中心にして物体を回転させようとする作用を力のモーメントという。

いま、ある 1 点に複数個の力のモーメントが作用したとすると、その総和はその合力の同じ点に対する力のモーメントに等しい。これをバリニオンの定理という。

また、構造物等が移動も回転もしないで静止しているとき、その構造物に作用する力は釣り合っていると見える。このような場合は常に以下の 3 条件を満たしている。

$$\begin{aligned}\Sigma H &= 0 && \text{各力の水平分力の総和は 0 である。} \\ \Sigma V &= 0 && \text{各力の垂直分力の総和は 0 である。} \\ \Sigma M &= 0 && \text{各力のモーメントの総和は 0 である。}\end{aligned}\tag{1.1}$$

## 1.2 断面1次モーメントおよび断面2次モーメント

図1.1に示すような、直交 $xy$ 軸座標の中に、ある任意の図形があるとする。

このとき図形の $x$ 軸に関するモーメントは、図形の中の微小面積に $x$ 軸からの距離 $y$ を掛けて図形全体にわたって足し合わせた値である。

図のように、図形を $n$ 個の微小部分に分解し、その微小面積を $a_i$ 、 $x$ 軸、 $y$ 軸からの距離を $y_i$ 、 $x_i$ として、 $a_i x_i$ 、 $a_i y_i$ を求め集計すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_x &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_i y_i + \dots + a_n y_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot y_i \\ Q_y &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

この $Q_x$ 、 $Q_y$ を $x$ 軸または $y$ 軸に関する断面1次モーメントという。

また、このとき下式に示すように微小面積に各軸からの距離の2乗を掛けて図形全体を足し合わせたものをそれぞれ、各軸に対する断面2次モーメントという。

$$\begin{aligned} I_x &= a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot y_i^2 \\ I_y &= a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

図1.2に示すように、面積 $A$ の図心 $G$ 点を原点とする直交軸( $X$ 軸、 $Y$ 軸)を図心軸という。また、次式より計算される $x$ 軸、 $y$ 軸に関する断面1次モーメントが0になるような直交軸の原点 $(x_0, y_0)$ を図心という。

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{Q_y}{A} \\ y_0 &= \frac{Q_x}{A} \end{aligned} \quad (1.4)$$

また、 $x$ 軸、 $y$ 軸に関する断面2次モーメントを $I_x, I_y$ 、 $X$ 軸、 $Y$ 軸に関する断面2次モーメントを $I_X, I_Y$ とすれば、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} I_x &= I_X + A y_0^2 \\ I_y &= I_Y + A x_0^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

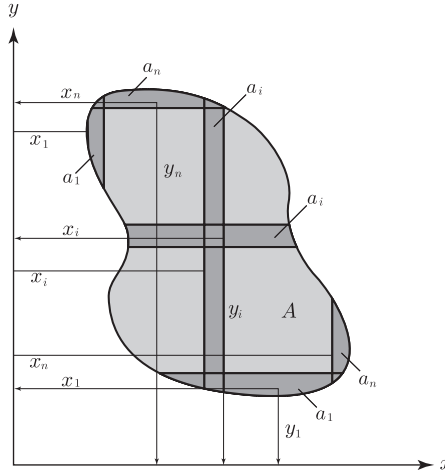


図 1.1

1 次モーメントは図心を意味するが、0 次モーメントを考えたとしても、これは図形の面積にほかならない。これらのモーメントは、構造力学等では構造物の強さの関係によく使われ、水理学では静水圧の計算に使われている。

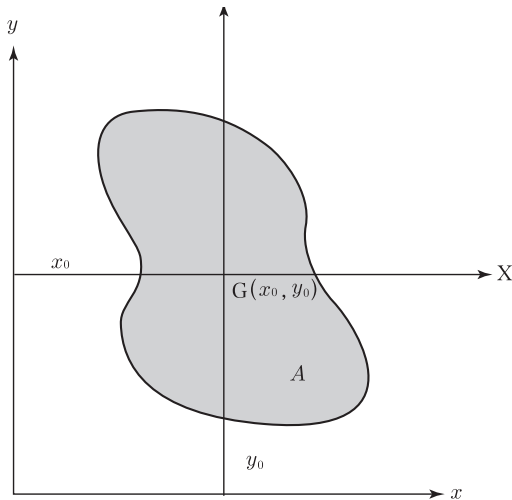


図 1.2

図 1.3 に示すような 5 種類の基本的な図形について、面積  $A$ 、図心の位置（図形の最下点から図心までの高さ  $y_0$ ）および断面 2 次モーメント  $I_0$  を求める式を示すと表 1.1 のようになる。

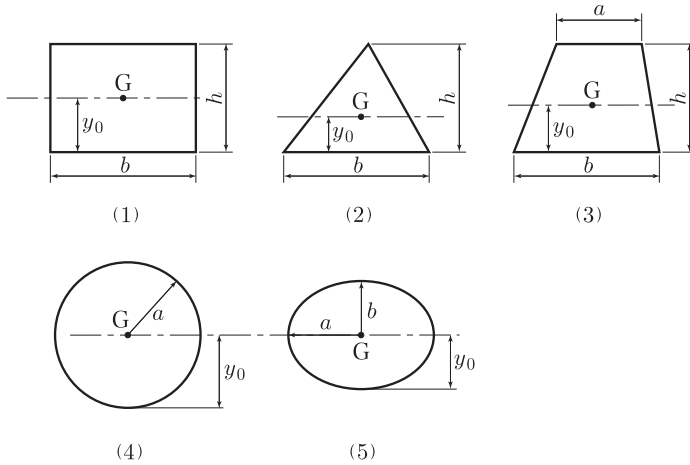


図 1.3 基本的な図形

表 1.1 主な図形の面積，図心位置および断面 2 次モーメント

	(1) 長方形	(2) 三角形	(3) 台形	(4) 円形	(5) 楕円形
面積 $A$	$bh$	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h(a+b)}{2}$	$\pi a^2$	$\pi ab$
図心位置 $y_0$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$	$a$	$b$
断面 2 次モーメント $I_0$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$	$\frac{\pi a^4}{4}$	$\frac{\pi ab^3}{4}$

## エクセル例題 1-1

表 1.1 に示す 5 種類の図形について、各図形の  $a, b, h$  を入力して、断面積、図心位置、断面 2 次モーメントを求める表をエクセルにて作成する。

## エクセル計算式（セルの内容）

$C7=C4*C5$   
 $D7=D4*D5/2$   
 $E7=(E3+E4)*E5/2$   
 $F7=F3^2*3.141592$   
 $G7=G3*G4*3.141592$   
 $C8=C5/2$   
 $D8=D5/3$   
 $E8=(E5/3)*(2*E3+E4)/(E3+E4)$   
 $F8=F3$   
 $G8=G4$   
 $C9=C4*C5^3/12$   
 $D9=D4*D5^3/36$   
 $E9=(E5^3/36)*(E3^2+4*E3*E4+E4^2)/(E3+E4)$   
 $F9=(3.141592*F3^4)/4$   
 $G9=(3.141592*G3*G4^3)/4$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			長方形	三角形	台形	円形	楕円形
3		a	-	-	3.00	1.50	1.50
4		b	3.00	3.00	3.00	-	1.00
5		h	2.00	2.00	2.00	-	-
6							
7		面積A	6.00	3.00	6.00	7.07	4.71
8		図心位置y0	1.00	0.67	1.00	1.50	1.00
9		断面2次モーメントI0	2.00	0.67	2.00	3.98	1.18
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							

図 1.4 エクセル例題 1-1

# 第6章

## 不静定構造

### - 2次元ラーメン計算プログラム -

#### 6.1 不静定次数

梁は、その支持の方法によって、おおむね図6.1に示すように分けられる。

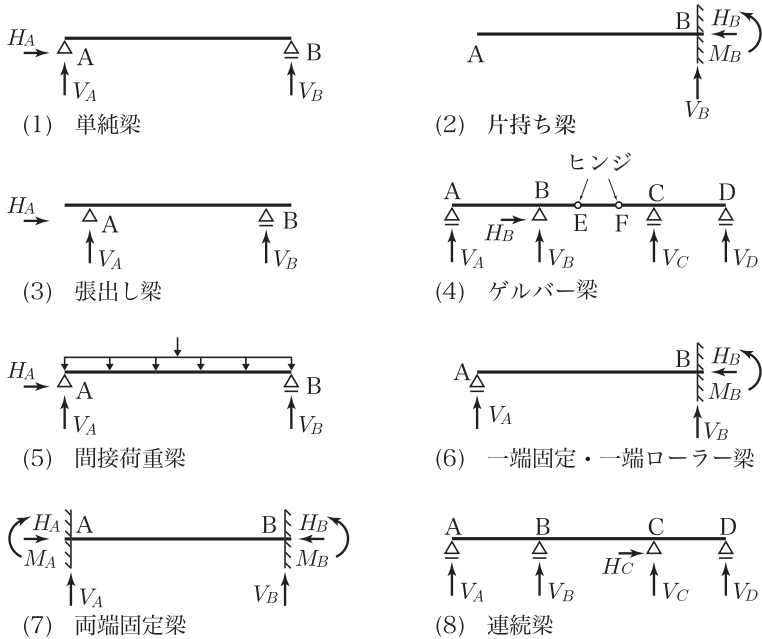


図6.1 梁の種類

単純梁、片持ち梁および張出し梁の反力数は3つだけしかなく、釣り合いの3条件式、すなわち  $\Sigma H = 0$ 、 $\Sigma V = 0$ 、 $\Sigma M = 0$  から反力を求めることができる。このような梁を静定梁という。

これに対して反力数が3つを超え、釣り合いの3条件式だけでは反力を求め

ることができない梁を不静定梁という。このとき、反力数を  $r$  とすると、 $r - 3$  を不静定次数という。

梁が静定か不静定かを判断するには、式 (6.1) に示す梁の判別式を用いて判断する。式 (6.1) において、不静定次数  $n = 0$  となる梁は静定梁、 $n > 0$  となる梁は不静定梁となる。

$$n = r - 3 - h \quad (6.1)$$

$n$  : 不静定次数

$r$  : 反力の総数

3 : 釣り合いの条件式数 ( $\Sigma H = 0$ ,  $\Sigma V = 0$ ,  $\Sigma M = 0$ )

$h$  : 梁と梁とをヒンジで接続する場合の接続ヒンジの総数

図 6.1 の梁について、式 (6.1) を適用すると、図 6.2 のようになる。

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		はりの種類	反力の総数 $r$	つりあい 条件式数	ヒンジ数 $h$	不静定次数 $N$	判別結果
3		単純梁	3	3	0	0	静定
4		片持ち梁	3	3	0	0	静定
5		張出し梁	3	3	0	0	静定
6		ゲルバー梁	5	3	2	0	静定
7		間接荷重梁	3	3	0	0	静定
8		一端固定・一端ローラー梁	4	3	0	1	1次不静定
9		両端固定梁	6	3	0	3	3次不静定
10		連続梁	5	3	0	2	2次不静定
11							
12							
13							
14							
15							

図 6.2 静定梁の判定

一端固定・一端ローラー梁、両端固定梁、連続梁は、いずれも不静定梁であるが、ゲルバー梁の場合は、反力数が 5 つとなるが、静定梁となる。

## 6.2 簡単な不静定構造の計算例

ここでは、2次元ラーメン計算プログラムを使って、いくつかの簡単な不静定構造の梁を計算した例題を示す。

なお、2次元ラーメン計算プログラムの操作手順を6.3に、プログラムリストを8.1に記載した。

### エクセル例題 6-1

図6.3に示すように、1端固定、他端可動支点の梁に集中荷重が作用する場合について計算する。

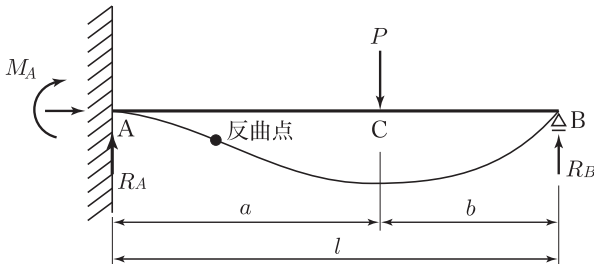


図 6.3 1端固定他端可動支点梁

例題では、梁を4 mのH-200として、50 cmピッチの応力・変位を計算した。よって、梁の自重も分布荷重として加味されている。

2次元ラーメン計算.xls [互換モード] - Microsoft Excel

ホーム 挿入 ページレイアウト 数式 データ 校閲 表示 開発

Q40

A B C D E F G H I J K L M N O

ラーメンの計算(入力1)

節点の数			材料の数				要素の数			
9			1				8			

番号	座標X	座標Y	番号	弾性係数	断面積	断面2次M	単位重量	番号	節点1	節点2	材料
1	0	0	1	2.00E+07	39.65	1620	0.077	1	1	2	1
2	50	0						2	2	3	1
3	100	0						3	3	4	1
4	150	0						4	4	5	1
5	200	0						5	5	6	1
6	250	0						6	6	7	1
7	300	0						7	7	8	1
8	350	0						8	8	9	1
9	400	0									

図 6.4 節点, 材料, 要素データ入力

2次元ラーメン計算.xls [互換モード] - Microsoft Excel

ファイル ホーム 挿入 ページレイアウト 数式 データ 校閲 表示 開発

P28

A B C D E F G H I J K L

ラーメンの計算(入力2)

荷重の数				拘束の数			
1				2			

拘束条件は、Yes / No で指定

節点	荷重X	荷重Y	回転M	節点	拘束X	拘束Y	拘束M
5	0	-100000	0	1	Yes	Yes	Yes
				9	No	Yes	No

図 6.5 荷重データ, 拘束条件の入力

10 第6章 不静定構造 - 2次元ラーメン計算プログラム標準な不静定構造の計算例

2次元ラーメン計算.xls [互換モード] - Microsoft Excel

ホーム 挿入 ページレイアウト 数式 データ 校閲 表示 開発

CS4

レーメンの計算(計算・出力)

計算

節点	変位X	変位Y	回転角	要素	軸力X	軸力Y	モーメント	軸力X	軸力Y	モーメント
1	0	0	0	1	0	69434.599	7560113.282	0	-69434.599	-4088383.34
2	0	-0.247	-0.515	2	0	69281.946	4088383.344	0	-69281.946	-624286.032
3	0	-0.81	-0.723	3	0	69129.294	624286.032	0	-69129.294	2832178.656
4	0	-1.42	-0.626	4	0	68976.641	-2832178.656	0	-68976.641	6281010.719
5	0	-1.813	-0.223	5	0	-31176.011	-6281010.719	0	31176.011	4722210.157
6	0	-1.785	0.264	6	0	-31328.664	-4722210.157	0	31328.664	3155776.97
7	0	-1.393	0.612	7	0	-31481.316	-3155776.97	0	31481.316	1581711.158
8	0	-0.757	0.821	8	0	-31633.969	-1581711.158	0	31633.969	12.721
9	0	0	0.891							

図 6.6 計算の実行および結果 (数値データ)

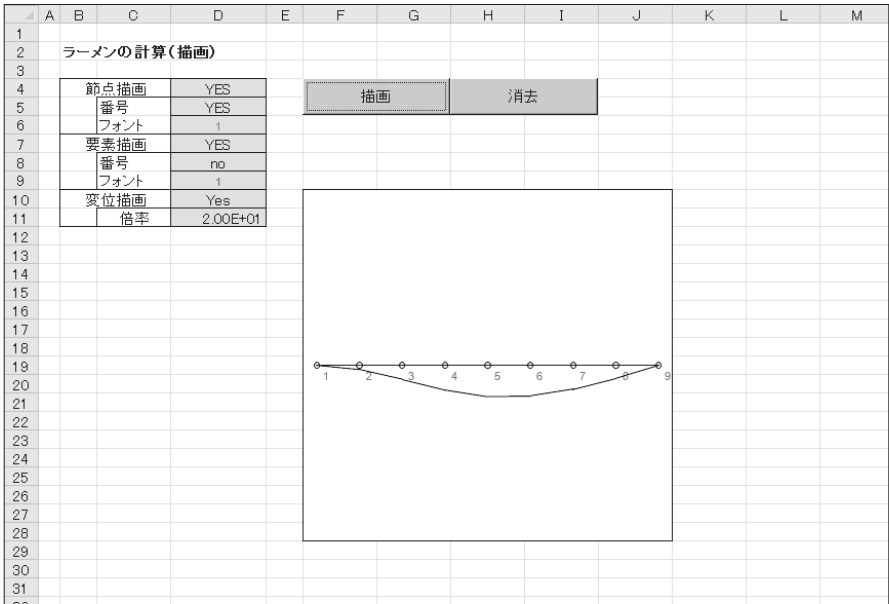


図 6.7 計算結果 (図化データ)