第 2 章

静水の力学

2.1　静水圧

流体の内部では相対速度がなければ摩擦力は働かないのであるから，水が静止していれば，水中でも，水と壁面の間でも摩擦力は存在しない．また表面張力を受けている水面を除けば，流体は引張り力を受けて静止していることはできないから，一般に静止した水の中に働く力は圧力だけであるということができる．このような静水の中に働いている圧力を静水圧と呼んでいる．

水を入れた容器の内面，あるいは水中に仮想した面には静水圧が働き，その方向は考えている面に垂直である．このことは面に沿う方向の力のないことから明らかであって，これは水に限らず，空気・油など，すべての流体に共通である．

水圧の強さは単位面積当りの水圧の大きさであって，面積 A に働く全水圧を P とすると，A の上に水圧が一様に分布している時は，水圧の強さ p は

$$p = P/A$$

であるが，水圧の強さが一様でなければ，小さい面積 ΔA に働く水圧 ΔP を考えて，強さ p を次のように定義する．

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

静水中の任意の点における水圧の強さはすべての方向に等しい値をもつ．これを証明するために，図 2.1 の ように任意の点 O$'$ を頂点とする微小四面体を作り，O$'$A，O$'$B，O$'$C はそれぞれ x，y，z 軸に平行にとる．ただし x，y 軸は水平，z 軸は鉛直下向きとする．

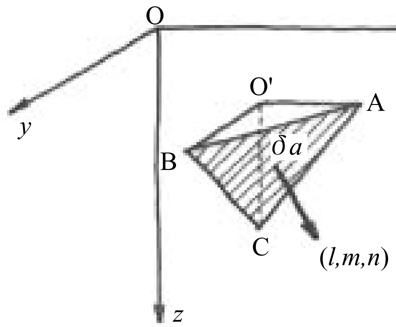


図 2.1　水圧の強さ

三角形 ABC の方向は任意で，その面積を δ_a，面 ABC の垂線の方向余弦を i, m, n とする．また四つの面 O′BC, O′CA, O′AB および ABC に働く水圧の強さをそれぞれ p_x , p_y, p_z および p とする．この四面体に働く外力の x 方向のつり合い条件は

$$p_x \times (\delta a \cdot l) = (p \cdot \delta a) \times l, \qquad \therefore p_x = p$$

同様にして $p_y = p$ 力が得られる．次に z 方向のつり合い条件を考えると，水の単位重量を w として

$$p_z \times (\delta a \cdot n) + w \times \frac{1}{6}(\overline{\mathrm{O'A}} \cdot \overline{\mathrm{O'B}} \cdot \overline{\mathrm{O'C}}) = (p \cdot \delta a) \times n$$

である．しかし O′AB の面積は $\delta a \cdot n = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{O'A}} \cdot \overline{\mathrm{O'B}}$ であるから

$$p_z = p - w \times \frac{\overline{\mathrm{O'C}}}{3}$$

になる．そこで三角形 ABC を無限に小さくすると，$\overline{\mathrm{O'C}} \to 0$ であり，p は点 O′ における水圧の強さとなり，さらに $p_z = p$ である．したがって

$$p_x = p_y = p_z = p \tag{2.1}$$

すなわち面 ABC の方向に関係なく，この面に働く静水圧の強さは p_x, p_y および p_z に等しい．これは静水中の一点における静水圧の強さはすべての方向から一様であることを示すものである．

次に水面からの深さ z の位置における静水圧の大きさを求めるには，$x - y$ 面を水面上にとり，深さえの位置に大きさ $dx \times dy \times dz$ の微小直六面体を考えて，これに働く外力

の z 方向のつり合い条件を求めると，水の単位重量を w として

$$p \times dx\,dy - \left(p + \frac{dp}{dz}dz\right) \times dx\,dy + w \times dx\,dy\,dz = 0$$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dz} = w \tag{2.2}$$

水面 $z = 0$ では水圧は大気圧の強さ p_0 に等しいから，水深 z の単位では

$$p = p_0 + wz \tag{2.3}$$

である．

1 気圧に相当する p_0 の値は 1013mb（1，013 $\times 10^5 N/m^2$）であって，水頭で表わすと $p_0/w = 10.34m$（約 10m）である．式 (2.3) から明らかなように，高さが Δz だけ違う 2 点間の水圧の差は $w \cdot \Delta z$ である．

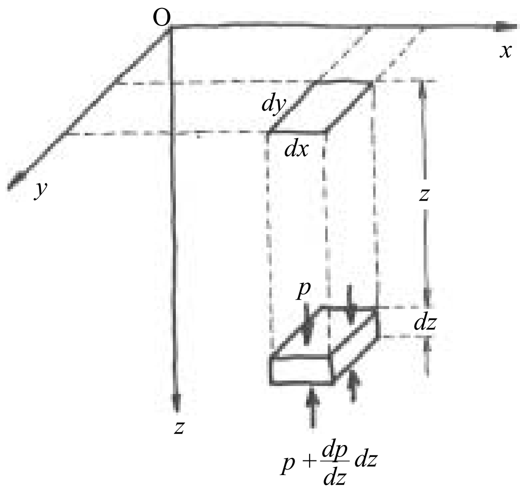


図 2.2　微小六面体に働く外力

式 (2.3) で表わされる圧力の値を絶対圧力といい，これに対して大気圧 p_0 に等しい圧力を標準として，これを 0 とし

$$P = WZ \tag{2.4}$$

で表わしたものをゲージ圧力と呼んでいる．一般には後者が用いられ，その時は水面で $p = 0$ であり，絶対 0 の圧力が $-p_0$ であって，$0 > p > -p_0$ の範囲の圧力を負圧と呼んでいる．

2.2　圧力の伝達

水を満たした密閉容器の中で水圧の伝わる速度 $c = \sqrt{E/\rho}$ は容器の変形があっても一般に 1000m/s 以上であるから，普通に考える容器では，水圧は瞬間的に容器全体に伝わると考えてよい．

図 2.4 のような水を満たした容器で，面積 a の栓の上かち P の力を加えて，栓の底面 A での水圧 p_A を $\Delta p = P/a$ だけ高めると，z だけ下にある点 B での水圧 p_B も同時に Δp だけ上がって，$p_B = p_A + wz + \Delta p$ になる．この現象をパスカルの原理という．

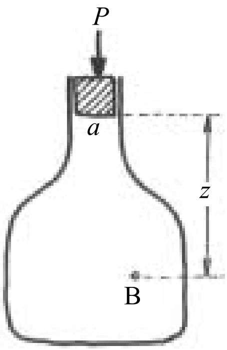


図 2.3　圧力の伝達

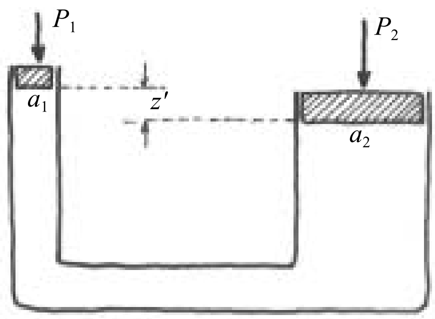


図 2.4　パスカルの原理

図 2.5 のように大きさの違う二つの管を連ねた U 字管容器に水を満たし，栓で密閉して図のようなつり合いの状態に保つ，二つの栓の断面積は a_1，a_2 で，a_2 は a_1 よりも十分

に大きいものとする．a_1 の栓の上に力 P_1 を加えると，容器内の水圧は全体に P_1/a_1 だけ高まり，a_2 の栓を押し上げる力の増加は $a_2 \cdot P_1/a_1$ である[*1]．したがってこれとつり合うための力を P_2 とすると

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} \tag{2.5}$$

であって，P_1 の力を加えることによって，その a_2/a_1 倍の力が得られる．水圧機はこの原理を利用して大きな力を得るのに利用される．耐圧試験機に図 2.6 のような装置を用いれば，試料を圧縮する力 Q は次の式で与えられる．

$$Q = P \times \frac{L}{l} \times \frac{A}{a} \tag{2.6}$$

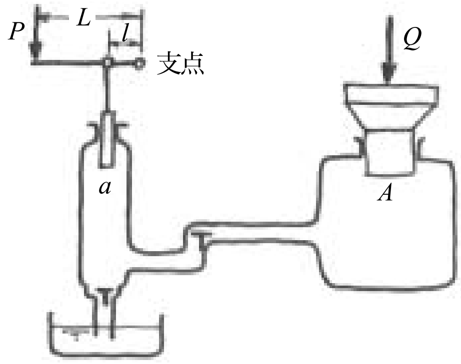


図 2.5　パスカルの原理の利用

圧力を伝える液体としては油が用いられることが多い．A と a の比を大きくすると，得られる力は大きいが，A のわずかな動きに対して z の動きは非常に大きくなる．この動きを少なくするにはポンプで油を補給する．

[*1] 栓のまわりの摩擦は考慮していない．

2.3　水圧の測定

密閉した容器や管の申の水圧の強さは水圧計（マノメーター）によって測定される．水圧はいつも水頭 p/w の形で測られるから，ここでは

$$p/w = z_p$$

で表わす．

図 2.8(a) は水柱の高さ h を測って A 点での水圧 $p = wh$，すなわち $z_p = h$ を求めるものである．同図 (b) は水銀を入れた圧力計で，圧力の高い場合に用いる．水銀の単位重量を w' とし，h と h' を図のようにとると，つり合いの条件から

$$p + wh' = w'(h + h')$$

$$\therefore \qquad \frac{p}{w} = z_p = k(h + h') - h', \quad \text{ただし} \quad k = \frac{w'}{w}$$

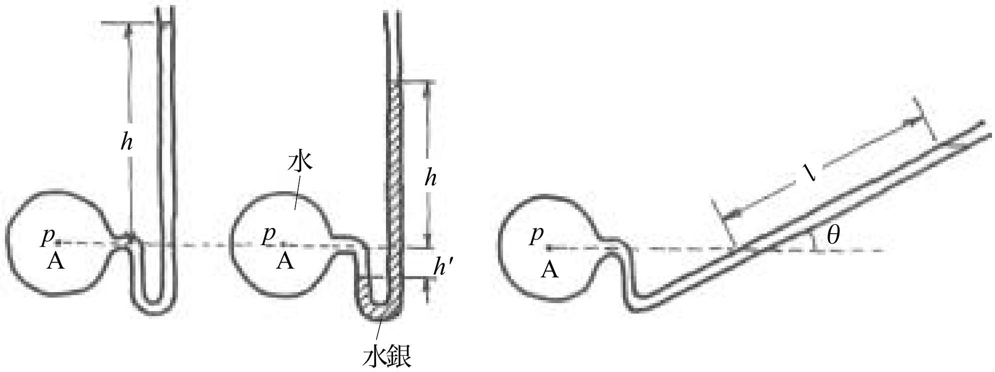


図 2.6　水圧の測定

したがって h と h' を測れば p が求められる．図 2.8(c) は小さい水圧を測るためのもので，水柱の長さ l を測定して $zp = \sin\theta$ を求める．

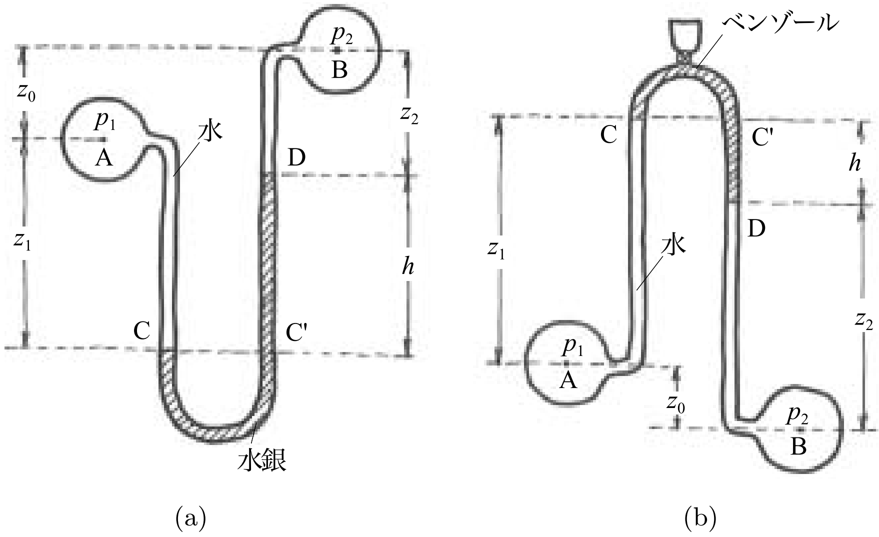


図 2.7　U 字管型差圧計

図 2.9 は A と B との水圧 p_1、と p_2、との差を求めるための U 字管型差圧計である．図 2.9(a) は圧力差の大きい場合に用いるもので，C での水圧は $p_1 + wz_1$．C$'$ の水圧はこれに等しく，D での水圧は $p_1 + wz_1 - w'h$ であって，これは $p_2 + wz_2$ に等しい．

$$\therefore \qquad p_1 - p_2 = w(z_2 - z_1) + w'h, \quad \text{また} \quad h = (z_0 + z_1) - z_2$$

$$\therefore \qquad z_{p1} - z_{p2} = z_2 - z_1 + kh \tag{2.7}$$

z_{p1}, z_{p2} は A と B での圧力水頭で，$k = w'/w$ である．$z_0 = 0$ ならば $h = z_1 - z_2$ で，式 (2.7) の右辺は $(k-1)h$ である．

図 2.9(b) は小さい圧力差を測るのに用いられるもので，比重が 1 よりも少し小さく，水と混ざらない液体（例えばベソゾールなど）を U 字管の頂部に満たす．この液体の単位重量を $w''(w''/w = h)$ とすると，図の装置では

$$p_1 - p_2 = w(z_1 - z_2) - w''h$$

$$\therefore \qquad z_{p1} - z_{p2} = z_1 - z_2 - kh \tag{2.8}$$

であって，$z_0 = 0$ ならばこの式の右辺は $(1-k)h$ となる．$1-k$ は小さい値であるから，圧力計の読み h は拡大されるが，温度による k の値の変化の影響が大きい．

マノメーター

圧力を測るのにはマノメーターがよく用いられる．マノメーターでいちばん感度の良いのはマイクロマノメーターでこれは市販のものを使うことになる．しかしマノメーターに工夫することによって感度をよくすることができる．

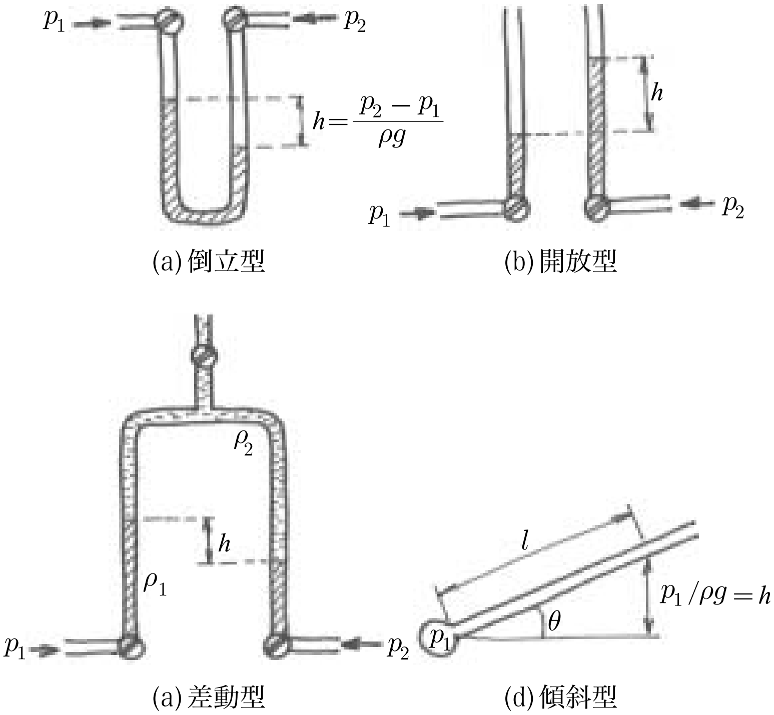


図 2.8　マノメーター

図 2.8 にいくつかの例を示したが，マノメーターは水の入った管で，水柱の高さはいずれも圧力に応じて上昇し，液体は水の代わりに他の液体，例えば水銀などを用いることもある．たとえば (a) の倒立型では水柱の上部はそれぞれ圧力が p_1，p_2 の空気で占められているとすれば水柱差 h は

$$h = \frac{p_2 - p_2}{\rho g} \quad \rho\text{: 液体または水の密度}$$

で与えられる．(c) の差動型では密度 ρ_1(水) の上に本より軽い ρ_2 の液体が入れて感度を上げることができる．

2.4　鉛直の平面に働く静水圧

水に接する固体表面に働く静水圧の方向は面に垂直であって，表面が平面の組合せになっていれば，静水圧は図 2.12 のように分布する．すなわち水平な面では，面積が A，水面からの深さが h ならば，この面に働く全水圧 P は

$$P = whA \tag{2.9}$$

であって，P の作用点はその面の図心である．

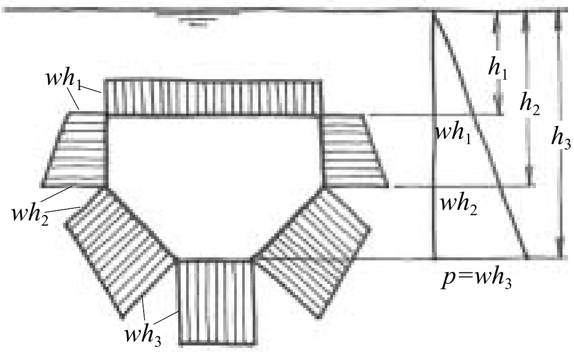


図 2.9　固体表面の静水圧

鉛直な平面については，面の形は任意であるとして，$x-y$ 面を水面上に，z 軸を鉛直下向きにとって，面は $y-z$ 面上にあるものとする．y 軸に平行な線で平面を細長い要素 $b(z)dz$ に分ける．ただし b は深さ z の所の面要素の長さである．bdz の面に働く水圧の強さは wz であるから，面全体に働く水圧 P は，面積 A 全体について $wz \times bdz$ を積分したものである．

$$\therefore \qquad P = w\int_A b(z)z\,dz = wh_G A \tag{2.10}$$

ただし h_G は水面から平面の図心 G までの深さである．P の作用点 C を水圧の中心と呼んで，C までの深さ h_C は平面に働く水圧の y 軸のまわりのモーメントを考えることに

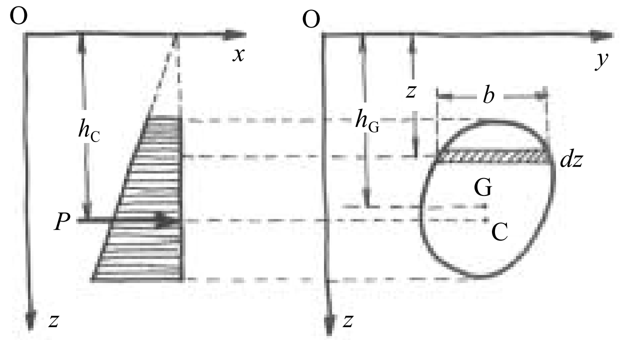


図 2.10　鉛直平面の静水圧

よって求められる．

$$
\begin{aligned}
Ph_C &= w\int_A bz\,dz \times z \\
&= w\int_A bz^2\,dz = wI
\end{aligned}
$$

I は平面の y 軸のまわりの二次モーメントであって，$z - h_G = \zeta$ と書くことにより

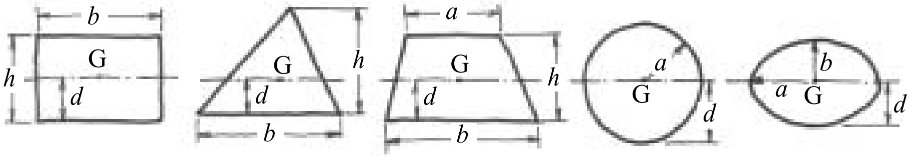
$$
\begin{aligned}
I &= \int_A b(\zeta)(\zeta + h_G)^2 d\zeta \\
&= \int_A b\zeta^2 d\zeta + 2h_G\int_A b\zeta^2 d\zeta + h_G^2\int_A bd\zeta
\end{aligned}
$$

この式の右辺の第 1 項は面の図心を通る水平線のまわりの二次モーメントであって．これを I_0 と書く．第 2 項は図心を通る軸のまわりの面積モーメントであるから 0 に等しく，第 3 項は $h_{G^2}A$ である．したがってこの式と式 (2.10) を上の式に代入すれば h_C が得られる．

$$
h_C = \frac{I}{h_G A} = h_G + \frac{I_0}{h_G A} \tag{2.11}
$$

これから見ると，水圧の中心は図心よりも $I_0/h_G A$ だけ下になっている．

いろいろな形の平面について水圧の中心を求めるには，その面の図心の位置と I_0 の値を知ることが必要である．図 2.15 に示した 5 種の基本的な図形について，図心の位置 (図形の最低点から図心までの高さ d) と I_0 求める式を示すと表 2.1 のようになる．



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

図 2.11　主な図形

表 2.1　主な図形の諸要素

	(a) 長方形	(b) 三角形	(c) 台形	(d) 円形	(e) 楕円形
d	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}\frac{(2a+b)}{(a+b)}$	a	b
I_0	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{h^3}{36}\frac{\left(a^2+4ab+b^2\right)}{(a+b)}$	$\frac{\pi a^4}{4}$	$\frac{\pi ab^3}{4}$
A	bh	$\frac{h}{2}(a+b)$	$\frac{bh}{2}$	πa^2	πab

四角形，三角形，台形，円，だ円などの各図形の下端までの水深が h のときの水圧の中心位置 h_c 及び全水圧を求める．

図 2.12　静水圧